UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Álgebras de Lie no resolubles de baja dimensión

Autor/es

ICÍAR SESMA LOREA

Director/es

MARÍA DEL PILAR BENITO CLAVIJO

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario en Modelización e Investigación Matemática, Estadístic

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2016-17

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Álgebras de Lie no resolubles de baja dimensión

Autor:

Iciar Sesma Lorea

Tutor/es: María del Pilar Benito Clavijo

MÁSTER:
Máster en Modelización, Inv. Matemática, .. (759M)

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2016/2017

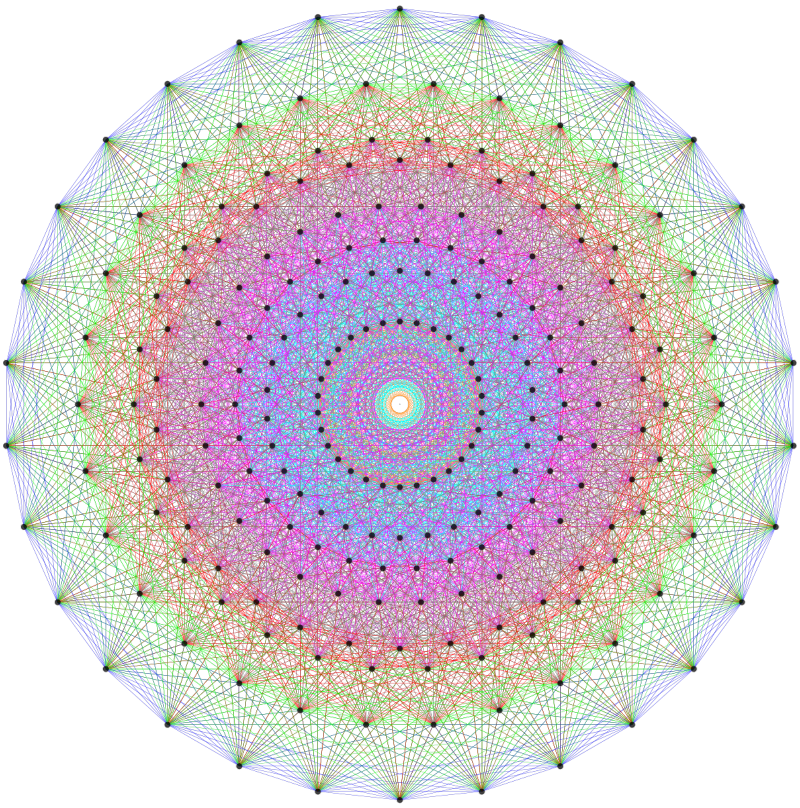
Álgebras de Lie no resolubles de baja dimensión

Iciar Sesma Lorea

Trabajo dirigido por
María Del Pilar Benito Clavijo

Trabajo fin de Máster

Máster en Modelización e Investigación
Matemática, Estadística y Computación



Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad de La Rioja

Julio 2017

Resumen

El objetivo en este trabajo era clasificar las álgebras de Lie no resolubles de dimensión ≤ 12.

El primer capítulo describimos el problema a tratar e introducimos el vocabulario y los resultados básicos que usaremos a lo largo de la memoria. A lo largo del segundo capítulo desarrollamos la clasificación completa para álgebras de Lie no resolubles de dimensión ≤ 12, de forma general para el caso factor de Levi semisimple y no simple y, en el caso factor de Levi sl_2, con radical resoluble nilpotente y que N/N^2 no presente módulos triviales.

Abstract

The aim of this project is classifying the non solvable Lie algebras whose dimension is ≤ 12.

In the first chapter we describe the problem and we introduce the vocabulary and the basic results that we will use through the memory. In the second chapter we develop the complete classification of non solvable of dimension ≤ 12. This is done in a general form for semisimple Levi factors and not simple and in the case of the factor sl_2 with solvable nilpotent radical and that has trivial modulus.

Índice general

Capítulo 1

Introducción al problema

El objetivo de este trabajo es clasificar álgebras de Lie no semisimples y no resolubles de pequeña dimensión sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{F}$. Tomando el teorema de Levi como punto de partida, para alcanzar las clasificaciones usaremos métodos basados en álgebra multilineal y teoría de representación elemental de álgebras de Lie semisimples de pequeña dimensión, fundamentalmente teoría de representación del álgebra de Lie simple 3-dimensional $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

Si denotamos por R el radical resoluble de un álgebra de Lie finito dimensional L, con producto $[a, b]$, el teorema de Levi garantiza que siempre es posible encontrar una base de L de modo que L contenga una subálgebra semisimple que complemente a R en L. Esta subálgebra se llama factor de Levi. La descomposición $L = S \oplus R$ (suma directa de espacios vectoriales) se dice descomposición de Levi y cumple las siguientes propiedades:

1. S es subálgebra de L, esto es, $[S, S] \subseteq S$ y como S es semisimple tenemos que $[S, S] = S$.
2. R es subálgebra de L, esto es, $R^2 = [R, R] \subseteq R$ y, como R es resoluble el contenido es estricto.
3. $[R, S] \subseteq R$, por tanto R es un S-módulo con la representación adjunta de S sobre R dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}\colon S &\to \mathfrak{gl}(R) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}(x)\colon R \to R \end{aligned}$$

Cuando la representación adjunta es fiel, esto es $\ker(\mathrm{ad}) = 0$, se dice que L es un álgebra de Lie fiel. Esta condición es equivalente a que L no tenga ideales simples.

Hay dos posibilidades de interacción entre R y S. La primera es que $[R, S] = 0$. En este caso el álgebra descompone en suma directa de dos ideales: S que es semisimple y R que es resoluble. La segunda posibilidad es que $[R, S] \neq 0$. Aquí la representación adjunta verifica que $0 \neq \mathrm{ad}(S) \subseteq \mathrm{Der}(R)$. De hecho se tiene el sigueinte lema.

Lema. *Sean S y R dos álgebras de Lie, S semisimple con producto $[a, b]$ y R resoluble con producto $r \cdot r'$. Entonces el espacio vectorial $L = S \oplus_\rho R$ con producto*

$$\langle s_1 \oplus r_1, s_2 \oplus r_2 \rangle = [s_1, s_2] + \rho(s_1)(r_2) - \rho(s_2)(r_1) + r_1 \cdot r_2$$

es un álgebra de Lie si y solamente si $\rho(S) \subseteq \mathrm{Der}(R)$.

La construcción $L = S \oplus_\rho R$ nos dice cómo obtener nuevas álgebras de Lie usando semisimples, resolubles y teoría de representación. Y el teorema de Levi nos asegura que todas las álgebras de Lie son de esta forma. El lema previo se cumple igualmente si consideramos cualquier terna

(L, ρ, M) donde L y M son álgebras arbitrarias y $\rho\colon L \to \mathfrak{gl}(M)$ es una representación tal que $\rho(L) \subseteq \mathrm{Der}(M)$.

Las álgebras de Lie simples sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica cero están completamente clasificadas desde 1900 y en los años 90 se completó esta clasificación añadiendo las de característica prima. Sin embargo, los intentos de clasificación de resolubles han sido poco fructíferos. Tan solo se dispone de clasificaciones en dimensiones bajas. El problema general es poco tratable, esto es, es un problema salvaje. Por tanto, por muy bonito que se presenta el lema anterior, el problema de clasificación total de álgebras de Lie no parece viable salvo que se impongan fuertes restricciones que, en algunos casos, pueden resultar de interés.

Ejemplos sencillos de la construcción general $L \oplus_\rho M$ son:

1. Extensiones escindidas nulas de un álgebra de Lie L y un S-módulo M mediante la fórmula

$$\langle s_1 \oplus r_1, s_2 \oplus r_2 \rangle = [s_1, s_2] + \rho(s_1)(r_2) - \rho(s_2)(r_1).$$

   En este caso declaramos $M^2 = 0$, esto es considerar al módulo como un álgebra de Lie abeliana.

2. Álgebra de Lie holomorfa del álgebra de Lie L. Como toda álgebra de Lie L es módulo natural para sus derivaciones ($d \in \mathrm{Der}(L)$, $d \circ a = d(a)$) podemos construir

$$H(L) = \mathrm{Der}(L) \oplus_{id} L.$$

Esta segundo construcción es válida también tomando cualquier S subálgebra de derivaciones de L. Así aparecen los simples ejemplos

- $S = \langle d \rangle$ con $d \in \mathrm{Der}(L)$,
- S subálgebra abeliana de derivaciones de L y
- S factor de Levi de $\mathrm{Der}(L)$, si existe.

Observamos que las álgebras holomorfas y los casos particulares previos, son todas álgebras fieles fieles debido a que usamos endomorfismos de L: $d \circ a = d(a) = 0$ para todo $a \in L$) con $d\colon L \to L$ nos lleva a que $d = 0$.

Para álgebras fieles, la idea de construcción del álgebra holomorfa es recogida en el siguiente Teorema probado por A.I. Malcev a mediados de los 50 (una demostración se puede encontrar en [7]).

Teorema. *Cualquier álgebra de Lie L fiel con radical R es isomorfa a una subálgebra de la forma $S \oplus_{id} R$, donde S es una subálgebra semisimple de cualquier factor de Levi S_0 de $\mathrm{Der}(R)$. Además dados S_1, S_2 subálgebras semisimples de S_0, las álgebras $S_1 \oplus_{id} R$ y $S_2 \oplus_{id} R$ son isomorfas si y solo si existe un automorfismo φ de R tal que $\phi S_1 \varphi^{-1} = S_2$.*

La construcción de álgebras de Lie mediante el pegado $L = S \oplus_\rho R$ se utiliza en [14] para la clasificación de las álgebras de Lie reales de dimensión 9 no semisimples y no resolubles. La técnica empleada en este trabajo implica el uso de teoría de representación de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$, es claro que la dimensión más grande para el factor de Levi es 3 debido a que el álgebra total tiene dimensión 9. Se clasifican las álgebras resolubles de dimensión 6 que pueden aparecer como radical resoluble. Las posibles candidatas se toman de la previa clasificación de las álgebras 6-dimensiona les nilpotentes descritas por J. Patera y otros en [8], las resolubles con nilradical de dimensión 5 especificadas por G. M. Mubarakzyanov en [6] y las álgebras resolubles 6-dimensionales con nilradical de dimensión 4 dadas por P. Turkowski en [13]. El artículo contiene 63 álgebras reales no isomorfas presentadas mediante sus constantes de estructura y sus descomposiciones en módulos para las representaciones de los dos posibles factores de Levi.

En este trabajo se busca extender la clasificación de Turkowski a dimensión ≤ 12 sin apoyarnos en clasificaciones previas y evitando el uso de presentaciones mediante constantes de estructura en la medida de lo posible. La restricción a cuerpos algebraicamente cerrados y el tope de dimensión 12 hace que la teoría de representación que necesitaremos sea muy asequible (las álgebras simples $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, $\mathfrak{so}_3(\mathbb{F})$ son isomorfas si $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado). Presentaremos la clasificación de una forma unificada por descomposición en estructuras conocidas de las que hablaremso en este capítulo. Los resultados obtenidos incluyen parcialmente la clasificación de las 9-dimensionales dada en [14].

1.1. Palabras clave y resultados

Los grupos de Lie y las álgebras de Lie son estructuras que aparecen en ciertas ramas de la matemática y la física teórica. Por ejemplo, en geometría diferencial los grupos de Lie se interpretan como variedades diferenciables dotadas de una operación interna diferenciable que les proporciona estructura de grupo, mientras que las álgebra de Lie se ven como campos de vectores invariantes. Por lo general, en física el estudio de dichas álgebras se hace desde el punto de vista de la geometría diferencial, pero nosotros en esta memoria las trataremos desde un enfoque algebraico.

En esta sección proporcionaremos el vocabulario básico relacionado con las álgebras de Lie y que usaremos a lo largo del trabajo. También presentaremos los resultados de estructura que necesitaremos aplicar para obtener nuestra clasificación. Comenzamos por la definición de álgebra y álgebra de Lie.

Definición 1.1.1. *Un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial A junto con una aplicación bilineal*

$$\begin{aligned} A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

El álgebra será asociativa si $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ con $x, y, z \in A$. La dimensión del álgebra coincide con la dimensión de A visto como un espacio vectorial.

Definición 1.1.2. *Un álgebra de Lie L sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un álgebra cuya aplicación bilineal recibe el nombre de corchete de Lie. Dicha aplicación además debe satisfacer*

- $[x, x] = 0$ *para todo* $x \in L$ *y*
- *la identidad de Jacobi que dice que*

  $$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

  para todo $x, y, z \in L$.

De la primera de las propiedades se deduce que el álgebra de Lie es antisimétrica, es decir, que para todo $x, y \in L$ se cumple que $[x, y] = -[y, x]$. Un álgebra de Lie se denomina abeliana si para todo par de elementos $x, y \in L$ se cumple $[x, y] = 0$.

De la definición es inmediato que todo espacio vectorial es un álgebra de Lie sin más que declarar el producto de sus elementos como nulo. Un ejemplo no trivial y asequible de álgebra de Lie es el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto vectorial:

$$(x, y, z) \wedge (x', y', z') = (yz' - y'z, xz' - x'z, xy' - x'y).$$

En este caso obtenemos un álgebra simple isomorfa a 3-dimensional $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Si queremos ejemplos un poco más generales tenemos que recurrir a las álgebras asociativas de aplicaciones lineales o equivalentemente matrices.

Para cualquier V un espacio vectorial de dimensión n, consideramos el conjunto de todos sus endomorfismos y definimos un prodcuto basado en la composición $f \circ g$ de aplicaciones y que es naturalmente antisimétrico:

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f,$$

donde $f, g \in \mathfrak{gl}(V)$

Esto define una estructura de álgebra de Lie conocida como *álgebra general lineal*, y que suele escribirse como $\mathfrak{gl}(V)$. En aras de fácilitar el trabajo surge la versión matricial del álgebra anterior. De modo que denotamos por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ al espacio vectorial de las matrices $n \times n$ donde, dadas dos matrices del espacio A y B, el corchete de Lie viene dado por $[A, B] = A \cdot B - B \cdot A$ siendo $\cdot$ el producto usual de matrices. Desde $\mathfrak{gl}(V)$ o su versión matricial $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$, obtenemos una gran variedad de interesantes ejemplos de álgebras de Lie:

Ejemplo 1.1.1. El álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ nos permite obtener subálgebras de una manera peculiar. Dada una matriz $S \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ el conjunto

$$\mathfrak{gl}_S(n, \mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : x^T S + Sx\}$$

define una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$.

Dada un álgebra de Lie L de dimensión finita podemos elegir una base del espacio vectorial $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Como el producto y la suma dan lugar a otro elemento del álgebra, esta base nos permite escribir este último como combinación lineal de sus elementos. Así se pueden calcular a partir de la base las llamadas *constantes de estructura* del álgebra, que denotaremos por c_{ij}^k. Estas constantes determinan el álgebra y se obtienen desde el producto de los elemento de la base:

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=i}^{n} c_{ij}^k x_k.$$

Como en cualquier estructura algebraica, en álgebras de Lie aparecen subálgebras, ideales, cocientes y homomorfismos, que introducimos a continuación.

Definición 1.1.3. *Una subálgebra de Lie de un álgebra de Lie L es un subespacio vectorial $V \subseteq L$ tal que $[x, y] \in V$ para todo $x, y \in V$. Un ideal de L es un subespacio vectorial $I \subseteq L$ tal que $[x, y] \in I$ para todo $x \in I, y \in L$.*

Notar que todo ideal es una subálgebra. Además se tiene que la intersección de subálgebras genera nuevas subálgebras, aunque la suma de subálgebras no las proporciona en general. En cambio la suma e intersección de ideales sí produce nuevos ideales. Uno de los ideales más conocidos dentro de las álgebras de Lie es el centro, que se define como

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \ \forall y \in L\}.$$

Además, cualquier subespacio dentro de $Z(L)$ es también un ideal. Mediante ideales llegamos a la estructura cociente que, junto con los homomorfismos constituyen las primeras herramientas básicas en cualquier estructura algebraica.

Definición 1.1.4. *Sea L un álgebra de Lie y sea I un ideal de L. El cociente L/I es un álgebra de Lie cuyo corchete de Lie se define como $[x + I, y + I] = [x, y] + I$ para todo $x, y \in L$.*

Definición 1.1.5. *Sean L_1, L_2 álgebras de Lie. Una aplicación $\varphi\colon L_1 \to L_2$ se dice que es un homomorfismo entre álgebras de Lie si para todo $x, y \in L_1$,*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Asociado a un homomorfismo $\theta\colon L_1 \to L_2$ tenemos el núcleo $\ker\theta$ que es un ideal, y el conjunto imagen $\operatorname{Im}\theta$ que es una subálgebra. Ambos relacioandos en la forma de isomorfismo $L_1/\ker\theta \cong \operatorname{Im}\theta$.

Definición 1.1.6. *Una derivación de L es una aplicación lineal $D\colon L \to L$ tal que*

$$D(x \cdot y) = x \cdot D(y) + D(x) \cdot y$$

para todo $x, y \in L$.

El conjunto de derivaciones de un álgebra de Lie L con el producto conmutador es un álgebra de Lie que denotaremos por $\operatorname{Der}(L)$. En particular esta es una subálgebra del álgebra de $\mathfrak{gl}(L)$. Por otra parte, se puede ver que la aplicación adjunta dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_L x\colon L &\to L \\ y &\mapsto [x, y] \end{aligned}$$

es una derivación. A las derivaciones dadas mediante aplicaciones adjuntas se les denomina derivaciones internas. El conjunto de estas,

$$\operatorname{Inner}(L) = \{\operatorname{ad}_L x : x \in L\},$$

constituye un ideal dentro de $\operatorname{Der}(L)$.

Las siguientes definiciones intrducen los conceptos de radical, nilradical y series derivadas que proporcionan interesantes ideales de un álgebra de Lie y conducen al concepto de álgebra resoluble y nilpotente.

Definición 1.1.7. *Sea L un álgebra de Lie, la serie derivada de L es la serie de ideales*

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq L^{(m)} \supseteq \ldots$$

donde $L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}]$ para $k \geq 1$. Si existe un m tal que $L^{(m)} = 0$ entonces se dice que L es resoluble y al menor m que lo cumple se le llama índice de resolubilidad de L.

La serie central descendente de L es la serie de ideales

$$L = L^1 \supseteq L^2 \supseteq \ldots \supseteq L^m \supseteq \ldots$$

donde $L^k = [L, L^{k-1}]$ para $k \geq 2$. Si para un cierto m se cumple que $L^m = 0$ entonces se dice que L es nilpotente y al menor m que cumple esto se le llama índice de nilpotencia de L.

Definición 1.1.8. *Sea L un álgebra de Lie. Se dice radical y se denota por $R(L)$ (o simplemente R) al ideal resoluble más grande dentro de L. De igual manera se llama nilradical $N(L)$ (o simplemente N) al ideal nilpotente más grande dentro del álgebra.*

Cabe destacar que los términos de la serie derivada y central descendente son ideales con la peculiaridad de que además son invariantes por derivaciones, es decir, para todo $din\operatorname{Der}(L)$ se tiene que $d(L^{(n)}) \subseteq L^{(n)}$ y $d(L^n) \subseteq L^n$.

Teorema 1.1.9. *Para cualquier álgebra de Lie de dimensión finita L los ideales $R(L)$ y $N(L)$ cumplen que*

$$[L, R(L)] \subseteq N(L).$$

Lema 1.1.10. *Para un álgebra de Lie L se tiene que*

$$N(L) = \{x \in R(L) \mid \operatorname{ad}_{R(L)} x \text{ es nilpotente}\}.$$

En particular si $x \in R(L) \setminus N(L)$ $\operatorname{ad}_{R(L)} x$ no es nilpotente.

Definición 1.1.11. *Sea L un álgebra de Lie. Se dice que L es semisimple si $R(L) = 0$. Por otro lado, se dice que L es simple si además no contiene ideales propios y $L' = [L, L] \neq 0$.*

Notar que si L es un álgebra semisimple entonces tiene un número finito de ideales simples. Así se puede escribir como suma directa de ellos.

Salvo cinco casos excepcionales , todas las álgebras de Lie simples definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado son isomorfas a $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{F})$ o $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{F})$. La definición de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ es muy simple, endomorfismos o matrices de traza cero. Para definir las otras usamos la subálgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$

$$\mathfrak{gl}_S(n, \mathbb{F}) := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : x^t S = -Sx\}. \tag{1.1}$$

Así, denotando por I_n a la matriz identidad $n \times n$, aparecen

- el álgebra de Lie ortogonal par como $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{F}) = \mathfrak{gl}_S(2n, \mathbb{F})$ donde
$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$
- el álgebra de Lie ortogonal impar como $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{F}) = \mathfrak{gl}_S(2n+1, \mathbb{F})$ donde
$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$
- y el álgebra de Lie simpléctica como $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{F}) = \mathfrak{gl}_S(2n, \mathbb{F})$ donde
$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando estas definiciones nos queda

$$\begin{aligned}
\mathfrak{so}(2n, \mathbb{F}) &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} M & N \\ P & Q \end{smallmatrix}\right) : M^t = -Q, N^t = -N, P^t = -P \right\}, \\
\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{F}) &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & p & q \\ r & M & N \\ s & P & Q \end{smallmatrix}\right) : M^t = -Q, N^t = -N, P^t = -P, r^t = -q, s^t = -p \right\}, \\
\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{F}) &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} M & N \\ P & Q \end{smallmatrix}\right) : M^t = -Q, N^t = N, P^t = P \right\}.
\end{aligned}$$

Todas ellas se conocen como álgebras de Lie lineales o clásicas para distinguirlas de las excepcionales. Para valores de n pequeños tenemos que $\mathfrak{so}(2, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$, $\mathfrak{so}(3, \mathbb{F}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, $\mathfrak{so}(4, \mathbb{F}) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, $\mathfrak{so}(5, \mathbb{F}) \cong \mathfrak{sp}(4, \mathbb{F})$ y $\mathfrak{so}(6, \mathbb{F}) \cong \mathfrak{sl}(3, \mathbb{F})$.

Una notación alternativa es poner la dimensión como subíndice. Así $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ sería equivalente a $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F})$ o incluso, si el cuerpo se sobreentiende o es genérico, simplemente $\mathfrak{sl}_n$.

Dentro de las álgebras finitas sobre un cuerpo de característica cero existe la llamada descomposición de Levi que queda desglosada en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.12 (E. E. Levi, 1905)**.** *Sea L un álgebra de Lie finita sobre un cuerpo de característica cero. Existe una subálgebra semisimple S tal que $L = S \oplus R(L)$. Se trata de la descomposición de Levi, donde S recibe el nombre de factor de Levi.*

Esta descomposición se complementa con el siguiente Teorema.

Teorema 1.1.13 (Teorema de Malcev-Harish-Chandra)**.** *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo de característica cero con descomposición de Levi $L = S \oplus R$. Para toda subálgebra semisimple S_1 de L existe $\varphi \in$Inter L*[1] *tal que $\varphi(S_1) \subseteq S$.*

1.2. Teoría de representación

La teoría de representación nos permite entender cómo es la estructura de las álgebras de Lie. De este modo, dicha teoría se puede ver como la piedra angular con la que construir un álgebra de Lie a partir de un álgebra semisimple y un homomorfismo entre álgebras de Lie. El fundamento de la teoría de representación está en que un álgebra de Lie se puede ver como una subálgebra dentro del álgebra de endomorfismos de un espacio vectorial finito.

En esta sección introduciremos los conceptos básicos de esta teoría y hablaremos en particular de las representaciones que surgen de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y de las representaciones más pequeñas de $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$.

Definición 1.2.1. *Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Una representación de L es un homomorfismo de álgebras de Lie tal que*

$$\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V),$$

donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$. Se dice que una representación φ es fiel si $\ker \varphi = 0$ y se llama trivial si $\ker \varphi = L$.

Las representaciones de un álgebra de Lie se pueden introducir de forma equivalente como la acción de un álgebra de Lie en un espacio vectorial.

Definición 1.2.2. *Una acción de un álgebra de Lie L en un espacio vectorial V es una aplicación bilineal*

$$\begin{aligned} L \times V &\to V \\ (x, v) &\mapsto x \cdot v \end{aligned}$$

que, para todo $x, y \in L$ y $v \in V$, verifica

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y(x \cdot v),$$

A este este espacio vectorial V se le denomina L-módulo.

Cabe destacar que dada una representación $\varphi \colon L \to \mathfrak{gl}(V)$, podemos ver V como un L-módulo por la acción $x \cdot v := \varphi(x)(v)$ para $x \in L$, $v \in V$. y recíprocamente, toda acción define una representación. Por tanto representación y acción son conceptos equivalentes.

Definición 1.2.3. *Sea L un álgebra de Lie y V un L-módulo. Un submódulo W de V es un subespacio vectorial invariante bajo la acción de L, es decir, aquel tal que $x \cdot w \in W$ para todo $x \in L$, $w \in W$.*

A partir de diferentes módulos o submódulos se pueden construir nuevos mediante sumas, intersecciones, cocientes y productos tensores. Introducimos ahora los conceptos de módulos cociente y producto tensor.

[1] *Inter* L es el subgrupo de automorfismos generado por los automorfismos internos, es decir, los elementos de la forma $\exp(\operatorname{ad} z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(\operatorname{ad} z)^n}{n!}$ tal que $z \in N(L)$.

Definición 1.2.4. *Sea L un álgebra de Lie, V un L-módulo y W un submódulo de V. El módulo cociente W/V se define como un espacio vectorial con la operación*

$$x \cdot (v + W) := (x \cdot v) + W,$$

con $x \in L$ y $v \in V$.

Definición 1.2.5. *Sea L un álgebra de Lie, V y W dos L-módulos. El producto tensor entre V y W es el módulo $V \otimes W$ con una aplicación bilineal*

$$\begin{aligned} \varphi \colon V \times W &\to V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w \end{aligned}$$

que es universal y tendrá por acción la definida por

$$x \cdot (v \otimes w) = (x \cdot v) \otimes w + v \otimes (x \cdot w),$$

donde $x \in L$, $v \in V$ y $w \in W$.

Definición 1.2.6. *Sea L un álgebra de Lie y V un L-módulo. Se dice que V es*

- *irreducible cuando no presenta submódulos propios (en caso contrario se le llama reducible),*
- *completamente reducible si descompone como suma directa de módulos irreducibles,*
- *e indescomponible si no existen U y W submódulos tal que $V = U \oplus W$.*

Necesitamos también el siguiente resultado de descomposición en suma de irreducibles y la noción de homomorfismo de módulos.

Teorema 1.2.7 (Teorema de Weyl)**.** *Los módulos de cualquier álgebra de Lie semisimple sobre un cuerpo de característica cero son completamente reducibles. Además, el número de módulos irreducibles de cualquier descomposición en suma de irreducibles es invariante y, salvo reordenación, los módulos implicados son isomorfos.*

Definición 1.2.8 (Homomorfismo de módulos)**.** *Sea L un álgebra de Lie, U y V dos L-módulos. Una aplicación lineal $\theta \colon U \to V$ es un homomorfismo de módulos si*

$$\theta(x \cdot u) = x \cdot \theta(u)$$

para todo $u \in U$ y $x \in L$.

Al conjunto de los homomorfismos de L-módulos de V en W lo denotaremos por $\mathrm{Hom}_L(V, W)$ y es un espacio vectorial con la suma de aplicaciones lineales y el producto por un escalar.Disponemos nuevamente de teoremas de isomorfía asociados a los módulos y sus homomorfismos, resaltando el primero de ellos.

Teorema 1.2.9. *Sea U y V dos L-módulos y $\theta \colon U \to V$ un homomorfismo entre ellos. Entonces $\ker \theta$ es un submódulo de U, $\operatorname{Im} \theta$ un submódulo de V y*

$$V / \ker \theta \simeq \operatorname{Im} \theta.$$

El Lema de Schur, que introducimos a continuación, lo usaremos con frecuencia en nuestra clasificación.

Lema 1.2.10 (Lema de Schur)**.** *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y sea U un L-módulo irreducible. Una aplicación $\theta\colon U \to U$ es un homomorfismo de L-módulos si y solo si $\theta = \lambda Id_U$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.*

De este lema se deduce que dados dos L-módulos irreducibles V y W sobre un cuerpo algebraicamente cerrado se tiene que

$$\dim(\mathrm{Hom}_L(V, W)) = \begin{cases} 1, & \text{para } V \cong W, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1.2.1. Representaciones de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$

El álgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$,matrices de tamaño 2×2 y de traza nula, tiene dimensión 3 y puede ser generada por las matrices

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos productos quedan determinados por $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$ y $[h, f] = -2f$.

Este álgebra tiene unos módulos asociados muy interesantes y con los que es relativamente fácil trabajar. Consideramos $V(n)$ el $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$-módulo formado por los polinomios homogéneos en dos indeterminadas de grado n. Luego $V(n)$ tiene como base

$$\{x^n, x^{n-1} \cdot y, \ldots, x \cdot y^{n-1}, y^n\}$$

con lo que su dimensión será $n + 1$. Destacar que $V(0)$ es el espacio vectorial de los polinomios constantes y, por ello, vendrá determinado por $V(0) = \mathbb{F} \cdot 1$.

La representación asociada a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ y al módulo $V(n)$ es

$$\begin{aligned} \varphi_n \colon \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) &\to \mathfrak{gl}(V(n)) \\ e \quad &\mapsto x \cdot \frac{\partial}{\partial y}, \\ f \quad &\mapsto y \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \\ h \quad &\mapsto x \cdot \frac{\partial}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Dicha acción proporciona una representación irreducible para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ y todas ellas conforman el conjunto de representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Visualmente podemos ver en la figura 1.1 cómo actúa $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ sobre el módulo $V(n)$.

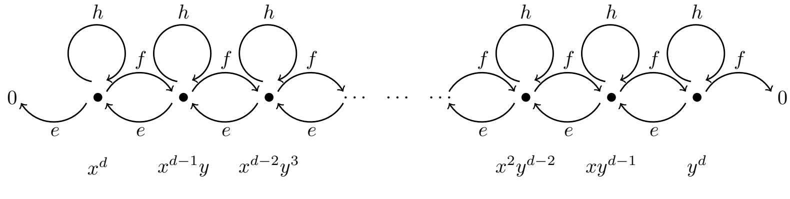


Figura 1.1: Acción de la base $\{e, f, g\}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ sobre $V(n)$.

Incluimos los diagramas que necesitaremos para la clasificación en el Tabla 1.1.

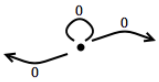
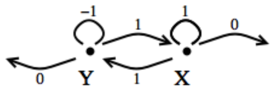
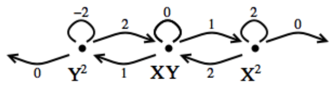
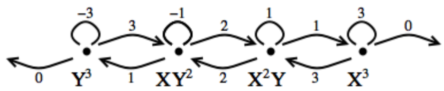
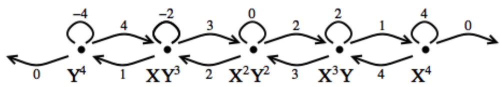
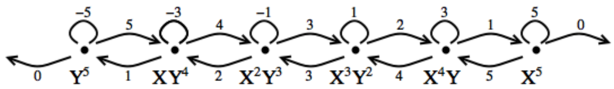
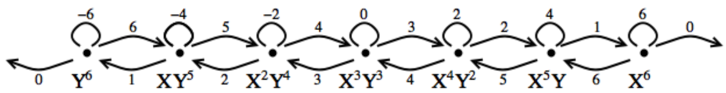
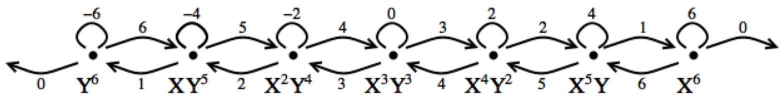
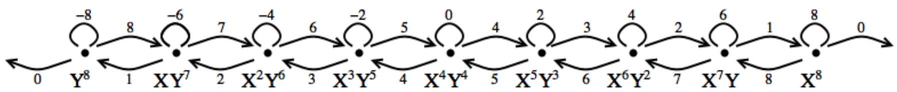
n	Acción de $\mathfrak{sl}_2$ sobre $V(n)$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Tabla 1.1: Diagramas de la acción de $\mathfrak{sl}_2$ sobre sus módulos irreducibles

Aunque no estemos necesariamente en un cuerpo algebraicamente cerrado, las consecuencias del lema de Schur también se cumplen para un cuerpo de característica cero y $\mathfrak{sl}_2$-módulos. De esta manera toda aplicación $\theta\colon V(n) \to V(n)$ será un homomorfismo de $\mathfrak{sl}_2$-módulos si y solo si $\theta = \lambda Id_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.

Lema 1.2.11 (Fórmula de Clebsch-Gordan)**.** *Dados $V(n)$ y $V(m)$ dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$-módulos irreducibles con $n \geq m$. Se llama fórmula de Clebsch-Gordan a la descomposición dada por*

$$V(n) \otimes V(m) \cong V(n+m) \oplus V(n+m-2) \oplus \ldots \oplus V(n-m).$$

De la anterior fórmula y del lema de Schur se deduce que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V(n) \otimes V(m), V(n+m-2k))$$

es un espacio 1-dimensional para $n \geq m$ y $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Por ello, todos los homomorfismos no nulos serán múltiplos escalares de uno en particular. En nuestro caso, utilizaremos unas aplicaciones lineales que reciben el nombre de transvecciones.

Definición 1.2.12. *Sea $V(n)$, $V(m)$ dos $\mathfrak{sl}_2$-módulos irreducibles. Se llama k-transvección a la aplicación $(\cdot,\cdot)_k \colon V(n) \otimes V(m) \to V(n+m-2k)$ determinada por*

$$(f,g)_k = \frac{(m-k)!}{m!}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\frac{\partial^k g}{\partial x^i \partial y^{k-i}}$$

donde $f \in V(n)$, $g \in V(m)$, $0 \leq k \leq m$ y $m \leq n$.

Propiedades sobre transvecciones que usaremos:

Lema 1.2.13. *Dados $V(n)$ y $V(m)$ dos $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$-módulos irreducibles con $n \geq m$.*

- *La k-transvección $(\cdot,\cdot)_k \colon V(n) \otimes V(m) \to V(n+m-2k)$ es un homomorfismo de $\mathfrak{sl}_2$-módulos.*
- *Para $n = m$, la k-transvección proporciona un homomorfismo simétrico si k es par, es decir, $(f,g)_k = (g,f)_k$. Mientras que nos da un homomorfismo antisimétrico si k impar, de modo que $(f,g)_k = -(g,f)_k$.*
- *El conjunto de homomorfismos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V(n) \otimes V(m), V(s))$ es de dimensión uno o cero. Además,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V(n) \otimes V(m), V(s)) = \begin{cases} \langle(\cdot,\cdot)_k\rangle & \text{para } s = n+m-2k \text{ con } 0 \leq k \leq m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

1.2.2. Otras representaciones

Asociado a cualquier L-módulo V aparece su módulo dual o contragradiente. Este módulo se define en el espacio dual $V^* = \{f \colon V \to \mathbb{F} \mid f \,\mathrm{es lineal}\}$ y la estructura de módulo queda determinada por la fórmula

$$(x \cdot f)(v) = -f(x \cdot v).$$

Para nuestros fines necesitamos también las dimensiones de las representaciones irreducibles de las álgebras de Lie $\mathfrak{sl}_3$ y $\mathfrak{so}_5$ vienen expresadas por las siguientes fórmulas con ($m_i \geq 0$):

- $\mathfrak{sl}_3$: $\dfrac{(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)}{2}$
- $\mathfrak{so}_5$: $\dfrac{(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)(2m_1+m_2+3)}{6}$

De las fórmulas previas tenemos que la dimensión más pequeña de una representación de $\mathfrak{sl}_3(V)$ es tres. Este álgebra tiene exactamente dos módulos irreducibles de para esta dimensión: el módulo natural sobre el espacio vectorial V con acción dada por $x \cdot a = x(a)$ y su módulo dual V^* cuya acción es $x \cdot f(a) = -f(x(a))$. Las representaciones irreducibles más pequeñas de $\mathfrak{so}_5(V)$ son de dimensión 4 de acuerdo con la fórmula previa.

El último resultado que necesitamos hace referencia a las representaciones de las álgebras semisimples.

Lema 1.2.14. *Sea $S = S_1 \oplus S_2$ un álgebra de Lie semisimple y no simple, entonces:*

a) *Las representaciones irreducibles de S son productos tensores de representaciones irreducibles de cada S_i. Luego son de la forma $V = V_1 \otimes V_2$, donde cada V_i es un S_i-módulo irreducible con la acción determinada por la fórmula $(s_1 + s_2) \cdot v_1 \otimes v_2 = (s_1 \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (s_2 \cdot v_2)$ para todo $s_i \in S_i$, $v_i \in V_i$.*

b) *Todo $\varphi\colon V_1 \otimes V_2 \to U_1 \otimes U_2$ homomorfismo de S-módulos viene dado por $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, donde $\varphi_i\colon V_i \to U_i$ es un homomorfismo de S_i-módulos.*

c) *Si la dimensión de una representación irreducible $V_1 \otimes V_2$ es un número primo, entonces alguno de los módulos V_i es el trivial y, por tanto, la representación no es fiel.*

1.3. Álgebras nilpotentes

Un lema que detallaremos más adelante nos dice que, dada un álgebra de Lie no resoluble y no semisimple con factor de Levi S y radical nilpotente N, se puede expresar como cociente de un álgebra nilpotente que libre por un S-módulo. Esta afirmación hace que, que a la hora de atacar nuestro problema, las álgebras nilpotetnes libres sean de gran utilidad.

Los resultados que veremos en este apartado así como sus demostraciones se encuentran en [1].

Definición 1.3.1. *Sea $\mathfrak{FL}(\mathfrak{m})$ el álgebra de Lie libre sobre el conjunto de generadores $\mathfrak{m} = \{x_1, \dots x_d\}$ con $d \geq 2$. Para cada $t \geq 1$, definimos $\mathfrak{n}_{d,t}$ como el álgebra de Lie cociente*

$$\mathfrak{n}_{d,t} = \frac{\mathfrak{FL}(\mathfrak{m})}{\mathfrak{FL}(\mathfrak{m})^{t+1}}.$$

que se denomina álgebra $t-$nilpotente libre sobre d generadores.

El álgebra libre $\mathfrak{FL}(\mathfrak{m})$ está generada por los monomios $[x_{i_1}, \dots x_{i_s}] = [\dots[[x_{i_1}, x_{i_2}]x_{i_3}]\dots x_{i_s}]$ para $s \geq 1$ y el ideal $\mathfrak{FL}(\mathfrak{m})^{t+1}$ es el $(t+1)$-ésimo término de la serie central descendente de $\mathfrak{FL}(\mathfrak{m})$. Para pequeños índices de nilpotencia podemos dar modelos de este tipo de álgebras (producto fácilmente detallable) basados en álgebra multilineal.

Ejemplos 1.3.1. Para $t = 1, 2, 3$ y $\mathfrak{m}$ de tamaño d arbitrario, tenemos:

- $\mathfrak{n}_{d,1} = \langle \mathfrak{m} \rangle$: espacio vectorial generado $\mathfrak{m}$ con producto trivial.
- $\mathfrak{n}_{d,2} = \mathfrak{m} \oplus \Lambda^2\mathfrak{m}$ con producto $[u, v] = u \wedge v$ para $u, v \in \mathfrak{m}$ y $[\mathfrak{m}, \Lambda^2\mathfrak{m}] = 0$.
- $\mathfrak{n}_{d,3} = \mathfrak{m} \otimes \Lambda^2\mathfrak{m} \otimes \frac{\mathfrak{m}\otimes\Lambda^2\mathfrak{m}}{\Lambda^3\mathfrak{m}}$ con producto para $x, y, z \in \mathfrak{m}$ dado por $[x, y] = x \wedge y$ y

$$[x, y \wedge z] = \frac{1}{3}\left(2x \otimes (y \wedge z) + y \otimes (x \wedge z) + z \otimes (y \wedge x) \mid x, y, z \in \mathfrak{m}\right)$$

La relación entre cualquier álgebra nilpotente y las libres viene observada en el siguiente resultado:

Proposición 1.3.2. *El álgebra $\mathfrak{n}_{d,t}$ y cualquier otra álgebra de Lie nilpotente del mismo tipo d y del mismo índice de nilpotencia t es imagen homomorfa de $\mathfrak{n}_{d,t}$.*

El álgebra de derivaciones de un álgebra libre $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}_{d,t})$ es, salvo isomorfismos, $\mathfrak{sl}_d(F)$. Por tanto, su álgebra holomorfa es:

$$H(\mathfrak{n}_{d,t}) = \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_{d,t}) \oplus_{id} \mathfrak{n}_{d,t} \cong \mathfrak{sl}_d(\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{n}_{d,t}.$$

Como $\mathfrak{sl}_d(F)$ contiene a cualquiere álgebra simple, esto nos dice que para cualquier álgebra simple S existen álgebras no resolubles y no semisimples que tienen como radical un álgebra libre. Esto no es cierto en general ni para álgebras nilpotentes cualesquiera ni para resolubles. De hecho, las álgebras nilpotentes que pueden aparecer como nilradical de un álgebra no resoluble con factor de Levi S están determinadas por la estructura como S-módulo de libres:

Teorema 1.3.3. *Sea S un álgebra de Lie semisimple, $\mathfrak{m}$ un S-módulo d-dimensional con la representación ρ y $\mathfrak{n}_{d,t}$ el álgebra libre nilpotente con índice de nilpotencia t. Entonces las álgebras de Lie que admiten a S como factor de Levi son de la forma $\mathfrak{n}_{d,t}/I$ donde I es un S-ideal, esto es un ideal de $\mathfrak{n}_{d,t}$ que es a la vez S-módulo y que cumple que $\mathfrak{n}^t_{d_t} \subsetneq I \subseteq \mathfrak{n}^2_{d,t}$.*

En el caso de álgebras meta-abelianas, esto es índice de nilpotencia $t = 2$ y por tanto cocientes de $\mathfrak{n}_{d,2}$, como $Z(\mathfrak{n}_{d_2}) = \mathfrak{n}^2_{d_2}$, los S-ideales de los que se habla en el teorema anterior coinciden con los S-submódulos contenidos en $\mathfrak{n}^2_{d_2}$. En general, el cálculo de S-ideales no es fácil si $t \geq 3$. La imposición final $\mathfrak{n}^t_{d_t} \subsetneq I \subseteq \mathfrak{n}^2_{d,t}$ que se le piden al ideal I en el teorema garantiza que el álgebra cociente resultante preserve el orden de nilpotencia t y tipo d.

En la clasificación que abordaremos en el siguiente capítulo, muchas de las álgebras que aparecen son metabelianas. De entre ellas, y por tener dimensión pequeña nos encontraremos con las llamadas álgebras de Heisenberg que pasamos a definir a continuación. El álgebra de Lie nilpotente no abelian

de dimensión más pequeña es el álgebra libre 3- dimensional $\mathfrak{n}^2_{2,2}$. La característica más relevante: su centro coincide con su álgebra derivada y es 1-dimensional. Esto permite defirnir el producto medianate una forma bilineal antisimétrica. La situación se puede plantear de una forma más general:

Definición 1.3.4. *Un álgebra de Lie L se dice álgebra de Heisenberg generalizada si su álgebra derivada L' es un espacio vectorial de dimensión uno que está contenido en $Z(L)$.*

En un álgebra de Heisenberg generalizada H, el producto está determinado por una forma bilineal $\varphi\colon H \times H \to \mathbb{F}$ mediante $[a, b] = \varphi(a, b)z$. Observamos que (H, φ) descompone en suma de dos ideales si y solamente si φ es degenerada. En este caso, $Z(H)$ contiene propiamente al derivado y, descomponiendo $H^\perp = H^2 \oplus A$ obtenemos la descomposición del álgebra en suma de ideales: $H = (V \oplus H^2) \oplus A$.

Si la forma antisimétrica que define H es no degenerada, el tipo de H tiene que ser $2n$ y podemos encontrar una base estándar $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z\}$ tal que $[x_i, y_j] = -[y_j, x_i] = \delta_{i,j}z$ con el resto de productos nulos. Por tanto, para cada $n \geq 1$ solamente existe un álgebra de Heisengerg no degenerada que denotaremos por $\mathfrak{h}_n$.

Si escribimos $\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_n) = V_n \oplus \mathfrak{h}^2_n$ y ponemos $\mathfrak{h}^2_n = \mathbb{F} \cdot z$, las álgebras de derivaciones $\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_n)$ se pueden describir en la forma:

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_n) = \{\delta : \delta|_V \in \mathfrak{sp}_{2n}(V, b), \delta(z) = 0\} \oplus k \cdot id_V \oplus \{\delta : \delta(V) \subset k \cdot z, \delta(z) = 0\}.$$

Salvo isomorfismos, el álgebra $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}_n$ es $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F})$. Por tanto el álgebra holomorfa es:

$$H(\mathfrak{h}_n) \cong \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{F}) \oplus \mathfrak{h}_n.$$

Esto nos dice que este tipo de álgebras aparecen como nilradicales de álgebras no resolubles de manera natural.

Las álgebras resolubles con nilradical un álgebra de Heisenberg han sido estudiadas en [10], donde los casos $\mathfrak{h}_1$ y $\mathfrak{h}_2$ se clasifican al completo. En este trabajo se prueba que, en general, las álgebras resolubles con nilradical $\mathfrak{h}_n$ aparecen por extensión de subálgebras abeliana de $\mathrm{Der}\,\mathfrak{h}_n = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{F})$. En el caso no resoluble tenemos que

Proposición 1.3.5. *Cualquier álgebra de Lie fiel con radical $\mathfrak{h}_n$ es isomorfa a un álgebra de Lie de la forma $S \oplus_{id} \mathfrak{h}_n$ donde S es una subálgebra semisimple del álgebra simplética* $\mathrm{Der}(\mathfrak{h}_n)$.

En lo referente a construcciones externas de álgebras con nilradical nilpotente haremos uso del siguiente resultado que puede encontrarse en el Teorema 1.3.6.

Teorema 1.3.6 (Šnobl, 2010)**.** *Sea L un álgebra de Lie con producto $[x, y]$, radical resoluble nilpotente N con índice de nilpotencia $t+1$ y descomposición de Levi no trivial $L = S \oplus N$ para algún álgebra de Lie semisimple S. Entonces, existe una descomposición no trivial de N en suma directa de S-módulos:*

$$N = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus \cdots \oplus m_t,$$

donde $N^j = m_j \oplus N^{j+1}$, $m_j \subseteq [m_1, m_{j-1}]$ tal que m_1 es un S-módulo fiel y para $2 \leq j \leq t$, el submódulo m_j descompone como suma directa de un conjunto de componentes irreducibles de la representación del producto tensor $m_1 \otimes m_{j-1}$. Además m_2 es un submódulo del módulo 2-alternado $\Lambda^2 m_1$.

Capítulo 2

Álgebras de Lie de dimensión ≤ 12

En este capítulo aplicaremos los resultados obtenidos en los apartados anteriores con el fin de clasificar las álgebras de Lie no resolubles existentes sobre cuerpos algebraicamente cerrados de dimensión ≤ 12. Durante el proceso diferenciaremos las álgebras con factor de Levi simple y semisimple con el fin de sacar conclusiones generales.

2.1. Lemas auxiliares

Las álgebras simples están determinadas y se encuentran detalladas en la sección 1.1 y las semisimples, son suma directa de simples. Por ello, hallaremos todas las álgebras no semisimples y no resolubles. Como vimos anteriormente en el lema de la introducción al capítulo 1, disponemos de un procedimiento de construcción $L = S \oplus_\rho R$ basado en el Teorema de Levi, el cual usa álgebras semisimples y álgebras resolubles y se fundamenta en derivaciones y en teoría de representación.

En el caso particular de que la representación ρ tenga núcleo no trivial, el álgebra $L = S \oplus_\rho R$ tendrá ideales simples. Esto produce una fácil situación de descomponibilidad como describimos en el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sea L un álgebras de Lie, S un factor de Levi de L y $R(L)$ su radical resoluble y $\rho_S : S \to \mathfrak{gl}(R)$ la representación adjunta restringida a S sobre $R(L)$. Entonces el álgebra L tiene ideales simples si y solamente si* $\ker(\rho_S) \neq 0$.

En este caso, L se puede descomponer de la forma $L = S_0 \oplus (S_1 \oplus R)$ donde $S_0 = \ker(\rho_S)$ es un ideal semisimple, S_1 es el complemento de S_0 en S y $(S_1 \oplus R)$ es un ideal de L que, como álgebra de Lie, no contiene ideales simples.

Demostración. Para la demostración realizaremos la implicación a izquierda y a derecha. Observemos que todo ideal simple de L está contenido en cualquier factor de Levi gracias al Teorema de Malcev-Harish-Chandra.

- $\Rightarrow$) Supongamos que L presenta ideales simples. Denotamos por S_0 a la suma directa de todos los ideales simples del álgebra. Por la observación inicial, $S_0 \subseteq S$ y podemos descomponer $S = S_0 \oplus S_1$ donde S_1 no contiene ideales simples de L. Como S_0 y $R(L)$ son ideales de L, $[S_0, R] \subseteq S_0 \cap R$ y, dado que $R \cap S = 0$ entonces $[S_0, R] = 0$ luego se tiene que $\ker(\rho_S) \neq 0$.

- $\Leftarrow$) Sea ahora $S_0 = \ker(\rho_S) \neq 0$. Es claro que S_0 está contenido en S luego es un álgebra semisimple. Es además ideal de S y, como $[S_0, R] = 0$ lo es de L. Por tanto, L tiene ideales simples.

$\square$

De este modo, toda álgebra con ideales simples es descomponible, quedando su producto reducido al que tienen los ideales que lo componen: un ideal semisimple y otro no semisimple y sin ideales simples. Por ello, nuestro problema se reduce a buscar álgebras no resolubles y no semisimples sin ideales simples. Las descomposiciones de L como suma de dos ideales las escribiremos en la forma $L = I \boxplus J$ para diferenciarlas de las descomposiciones en sumas directas. Veamos algunas otras situaciones de descomponibilidad en álgebras de Lie.

Lema 2.1.2. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión ≥ 2 tal que $Z(L) \not\subseteq L^2$. Entonces $L = A \boxplus B$ donde*

a) $A, B \neq 0$,

b) A ideal de L tal que $A^2 = L^2$ y

c) $Z(L) = Z(A) \boxplus B$.

Por lo tanto, L descompone como suma de dos ideales propios. Además, si L es nilpotente, A también lo es y el índice de nilpotencia de A coincide con el de L.

Demostración. El resultado es inmediato si $L^2 = 0$. Supongamos entonces que L no es abeliana y sea $U = L^2 \cap Z(L)$ que es ideal por ser intersección de ideales y V su ideal complemento en $Z(L)$, de modo que, $Z(L) = U \oplus V$. Observamos que $V \neq 0$ ya que $U = L^2 \cap Z(L) \neq Z(L)$ ya que $Z(L) \not\subseteq L^2$. Tomamos $W = L^2 \oplus V$, ideal por ser suma de ideales y lo complementamos en L por un subespacio denotaremos por T. De esta forma,

$$L = W \oplus T = L^2 \oplus V \oplus T = (L^2 \oplus T) \oplus V.$$

Observamos $L^2 \oplus T$ es un ideal de L porque contiene a L^2 y V los es porque los subespacios del centro lo son. Así $L = (L^2 \oplus T) \boxplus V$ es descomponible. □

De las dos lemas previos se deducen casos de descomponibilidad para un álgebra de Lie L. En el Lema 2.1.1 aparecen ideales simples y en el Lema 2.1.2 abelianos. Puede suceder que$L$ sea indescomponible pero que su radical resoluble descomponga en suma de ideales de L y, por tanto, de R. Notar que tales ideales son invariantes por la acción adjunta de cualquier factor de Levi de L, lo que facilita la estructura de radical y, por tanto, la de la propia L. Veamos alguna situación de este tipo.

Lema 2.1.3. *Para cualquier álgebra de Lie $L = S \oplus R(L)$ un álgebra de Lie, tenemos que*

a) si $Z(R(L)) \not\subseteq R(L)^2$, $R(L)$ descompone en suma directa de dos ideales de L y

b) si $R(L) = U_1 \oplus U_2 \oplus R(L)^2$ con U_1, U_2 S-módulos respecto de la respresentación adjunta, $R(L)^2 = V_1 \boxplus V_2$ con V_i ideales de L y se cumple que $[U_i, U_i] \subseteq V_i$ y $[U_i, U_j] = [U_i, V_j] = 0$ para $i \neq j$, entonces $R(L) = (U_1 \oplus V_1) \boxplus (U_2 \oplus V_2)$ es una descomposición en suma de dos ideales de L.

Demostración. Observamos que $Z(R)$ y R^2 son ideales de L, luego ambos son submódulos de R para la representación adjunta de S. Por el Lema 2.1.2 sabemos cómo podemos encontrar esos ideales en R con lo que únicamente debemos ver si podemos elegirlos que sean ideales de L. Consideramos V un S-módulo complemento de $Z(R) \cap R^2$ en $Z(R)$, que existe gracias al Teorema de Weyl puesto que $Z(R) \cap R^2$ es S-módulo.

Así, $Z(R) = (Z(R) \cap R^2) \oplus V$ es una descomposición como S-módulos. Del mismo modo, como $R^2 \oplus V$, podemos tomar T un S-módulo complemento de $V \oplus R^2$ en R, teniendo que $R = R^2 \oplus V \oplus T$. Observamos que $[R, V] = 0$ puesto que $V \subseteq Z(R)$ y $[S, V] \subseteq V$ por ser S-módulo. Además se tiene que $[L, R^2 \oplus T] \subseteq [S, R^2 \oplus T] + [R, R] \subseteq R^2 \oplus T$ ya que T y R^2 son S-módulos, por tanto $R^2 \oplus T$ es un ideal de L. Esto prueba la parte a).

Como $R = (U_1 \oplus V_1) \oplus (U_2 \oplus V_2)$, basta con probar que $U_i \oplus V_i$ son idelaes de L. De las condiciones del apartado b), tenemos que $[R, U_i + V_i] = [(U_1 \oplus V_1) \oplus (U_2 \oplus V_2), U_i + V_i] = [U_i \oplus V_i, U_i + V_i] \subseteq V_i$ y $[S, U_i + V_i] = U_i + V_i$ por ser submódulos, lo que prueba b). $\square$

Otras descomposiciones y resultados de interés que son conocidos y que utilizaremos en nuestra clasificación aparecen en los siguientes lemas. Este primero ya lo habíamos enunciado en el capítulo 1.

Lema 2.1.4. *Sea $S = S_1 \oplus S_2$ un álgebra de Lie semisimple y no simple, entonces:*

a) Las representaciones irreducibles de S son productos tensores de representaciones irreducibles de cada S_i. Luego son de la forma $V = V_1 \otimes V_2$, donde cada V_i es un S_i-módulo irreducible con la acción determinada por la fórmula $(s_1 + s_2) \cdot v_1 \otimes v_2 = (s_1 \cdot v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (s_2 \cdot v_2)$ para todo $s_i \in S_i$, $v_i \in V_i$.

b) Todo $\varphi \colon V_1 \otimes V_2 \to U_1 \otimes U_2$ homomorfismo de S-módulos viene dado por $\varphi_1 \otimes \varphi_2$, donde $\varphi_i \colon V_i \to U_i$ es un homomorfismo de S_i-módulos.

c) Si la dimensión de una representación irreducible $V_1 \otimes V_2$ es un número primo, entonces alguno de los módulos V_i es el trivial y, por tanto, la representación no es fiel.

Si $L = S \oplus R$ es no semisimple y no resoluble, la representación adjunta $ad \colon S \to \mathfrak{gl}(R)$ tiene algunos submódulos relevantes como son el radical resoluble R y el nilradical N, sus respectivos centros $Z(R)$ y $Z(N)$ y los ideales $N^{k+1} = [N, N^k]$ y $R^{(k+1)} = [R^{(k)}, R^{(k)}]$.

Para cualquier subespacio A de L podemos definir el subespacio

$$C_A(S) = \{a \in A \mid [S, a] = 0\} = A$$

que resulta ser el submódulo trivial dentro de A para la representación adjunta de S. Si A es un S-módulo, tenemos la descomposición en S-módulos,

$$A = A_1 \oplus A_0$$

donde A_1 es s la suma de todos los submódulos no triviales de A.

Durante la demostración de los dos teoremas fundamentales del trabajo necesitaremos algunas propiedades vinculadas al radical y al nilradical del álgebra. Para simplificar las pruebas adelantaremos algunos resultados.

Lema 2.1.5. *Si $L = S \oplus R$ es un álgebra de Lie y consideramos la representación adjunta de S sobre el radical, tenemos que:*

a) $R = R_1 \oplus R_0$, $N = N_1 \oplus N_0$ y $R_1 = N_1$.

b) $R_0^2 \subseteq N_0$, en particular, R_0 es una subálgebra de L y N_0 es un ideal nilpotente de R_0.

c) Los submódulos T de R tales que que $N \cap T = 0$ son todos triviales, esto es, $T \subseteq R_0$.

d) Para cada $x \in R_0$ y cada V submódulo de L, el subespacio $[x, V]$ es un S-submódulo de N y la aplicación $\mathrm{ad}_V\, x \colon V \to [x, V]$ es un homomorfismo de módulos. Además, $\mathrm{ad}_R\, x$ es nilpotente si $x \in N_0$ y no lo es si $x \in R_0 \setminus N_0$.

e) Para cualquier $x \in R_0$ y cualquier submódulo irreducible $V \neq 0$ contenido en N_1, o bien $[x, V] = 0$ o bien $[x, V]$ es un submódulo irreducible de N_1 isomorfo a V. Además, si $[x, V] \subseteq V$ y el cuerpo base es algebraicamente cerrado o $S = \mathfrak{sl}_2$, $\mathrm{ad}_V\, x = \alpha \cdot id$ para algún escalar α.

Demostración. Como $N \subseteq R$ entonces $N \oplus T = R$, con T submódulo complemento de N en R. Además, $[S,T] \subseteq T$ por ser módulo, $[S,T] \subseteq [L,R] \subseteq N$ y como $N \cap T = 0$ se tiene que $[S,T] = 0$ y por tanto, T es un módulo trivial que denotaremos por T_0. De este modo, $R = R_1 \oplus R_0 = N_1 \oplus N_0 \oplus T_0$ de lo que se deduce inmediatamente que $N_1 = R_1$.

Tenemos que N_0 es un ideal nilpotente de R_0 puesto que $[R_0, N_0] = N_0^2 + [T_0, N_0] \subseteq N_0$ ya que como $[T_0, N_0] \subseteq N$ y $s \cdot [T_0, N_0] = [sT_0, N_0] + [T_0, sN_0] = 0$ entonces $[T_0, N_0] \subseteq N_0$.

Por otro lado, R_0 es subálgebra ya que $R_0^2 \subseteq R_0$ cómo se ve a continuación

$$R_0^2 = [R_0, R_0] = [N_0 \oplus T_0, N_0 \oplus T_0] = N_0^2 + [N_0, T_0] + T_0^2 \subseteq N_0 \subseteq R_0.$$

De cara a probar c), como ya hemos visto antes $R = N \oplus T_0$, luego todo módulo T tal que $T \cap N = 0$ cumple que $T \subseteq N_0 \subseteq R_0$.

Ahora vamos a ver que $[x,V]$ es un S-módulo, es decir, $s \cdot [x,V] \in [x,V]$ para todo $v \in V$. En efecto,

$$s \cdot [x,V] = [s,[x,v]] = [[s,x],v] + [x,[s,v]] = [x, s \cdot v] \in [x,V]$$

ya que $s \cdot v \in V$. Además como V es irreducible sus únicos submódulos son $\{0\}$ y V, quedándonos dos posibilidades

1. $\ker \operatorname{ad}_V x = V$, luego $\operatorname{ad}_V x(V) = 0 = [x,V]$.
2. $\ker \operatorname{ad}_V x = 0$ y por el lema de Schur $\operatorname{ad}_V x = \alpha id_V$ para cierto $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, luego $[x,V] \cong V$.

En cualquier caso $\operatorname{ad}_V x$ es un homomorfismo de módulos. Para la última parte de d) tan solo debemos aplicar 1.1.9 y 1.1.10.

□

Destacamos que $R = N \oplus T_0$ donde $T_0^2 \subseteq N_0$ con lo que, aunque no sea para nada trivial, podemos restringuirnos al caso $N = R$ y una vez encontradas las álgebras añadirles un módulo T_0 trivial.

Lema 2.1.6. *Sea $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}) \oplus N(L)$ un álgebra de Lie donde $N(L)$ tiene como índice de nilpotencia d. Entonces o $t \leq 3$ o si $t = 4$ se trata del álgebras de Lie $n_{2,4}$ con la descomposición en módulos siguiente*

$$D(1;0;1;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(1) \oplus V(0) \oplus V(1) \oplus V(2).$$

Demostración. Estudiaremos las álgebras de Lie de dimensión ≤ 12 con índice de nilpotencia de 4, para comprobar que solo existe una opción.

Jugando con el tipo de N deducimos que no puede exceder de 5. Pues de completarlo con los irreducibles más pequeños, entre las opciones válidas según el Teorema de 1.3.6, superaríamos la dimensión máxima. Luego las únicas posibilidades quedan recogidas en el Tabla 2.1.

N/N^2	N^2/N^3	N^3/N^4	N^4
$V(1) \oplus V(2)$	$V(0)$	$V(1)$	$V(0)$
$V(1) \oplus V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	$V(0)$
$V(1) \oplus V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	$2V(0)$
$V(1) \oplus V(1)$	$2V(0)$	$V(1)$	$V(0)$
$V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	$V(2)$
$V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	$V(0)$
$V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	$V(2) \oplus V(0)$

Tabla 2.1: Opciones para cadenas con índice de nilpotencia 4.

Comprobando la identidad de Jacobi en cada una de las distintas posibilidades se obtiene que únicamente el álgebra libre $n_{2,4}$ es válida con la descomposición que presenta en el enunciado.

Suponemos que tenemos un álgebra de Lie cuyo índice de nilpotencia es $t \geq 5$. Este hecho implica que $N^5 \neq 0$ y N/N^5 es también un álgebra de Lie, pero en este caso su índice de nilpotencia será exactamente 4. Como solo hay un álgebra de Lie para $t = 4$, entonces N/N^5 debe ser dicha álgebra. Esto es

$$N/N^5 = V(1) \oplus V(0) \oplus V(1) \oplus V(2).$$

Debido al tamaño de N/N^5, el nilradical N como índice de nilpotencia a lo sumo 5 siempre y cuando se pudiese dar el caso $V(1) \oplus V(0) \oplus V(1) \oplus V(2) \oplus V(0)$. Sin embargo, este álgebra de Lie no se puede construir porque por el teorema 1.3.6 $m_1 \otimes m_4 \to m_5$ pero $V(1) \otimes V(2) \to V(3) \oplus V(1)$ y por ello no generan $V(0)$.

□

Por último, tendremos que determinar el factor de Levi del álgebra para empezar a nuestra clasificación.

Lema 2.1.7. *Los posibles factores de Levi de un álgebra de Lie L no resoluble y de $\dim(L) \leq 12$ sobre un cuerpo algebraicamente cerrado son $n \cdot \mathfrak{sl}_2$ con $1 \leq n \leq 4$, $\mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_3$ y $\mathfrak{so}_5$. Para cada uno de los factores, la dimensión del radical queda acotada como se indica en la tabla.*

S	$\dim(S)$	$\dim(R(L))$
$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$	12	0
$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$	9	≤ 3
$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$	6	≤ 6
$\mathfrak{sl}_2$	3	≤ 9
$\mathfrak{sl}_3$	8	≤ 3
$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_3$	11	≤ 1
$\mathfrak{so}_5$	10	≤ 2

Demostración. Estudiando las dimensiones de las álgebras simples sobre cuerpos algebraicamente cerrados, obtenemos que las álgebras posibles son $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{so}_3$, $\mathfrak{so}_4$, $\mathfrak{so}_5$, sp_2 y sp_4. Entre estas encontramos isomorfismos que nos permiten identificar posibilidades ya que $\mathfrak{sl}_2 \cong \mathfrak{so}_3 \cong sp_2$ y $\mathfrak{so}_5 \cong sp_4$. Por ello, como álgebras simples encontramos salvo isomorfismos $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{so}_4$, $\mathfrak{so}_5$ de dimensiones 3, 8, 6 y 10 respectivamente.

Las semisimples se originan como suma directa de las simples mencionadas y por tamaño las que pueden aparecer son: $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_3$ de dimensiones 6, 9, 12 y 11 respectivamente. Cabe mencionar que $\mathfrak{so}_4 \cong \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ con lo que únicamente hablaremos de $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. □

2.2. Clasificación

Analizaremos primero las álgebras cuyo factor de Levi es simple. Así, estudiaremos las construcciones que inducen $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_3$ y $\mathfrak{so}_5$ con las restricciones dadas por el tamaño del álgebra.

El primer paso será analizar qué ocurre para el factor de Levi $\mathfrak{sl}_2$. Debido a su baja dimensión, el radical presenta dimensión ≤ 9. Por ello, hay gran cantidad de casos y nos limitaremos a estudiar aquellos cuyo radical resoluble sea nilpotente (lo denotaremos por N) y que no presenten módulos triviales en N/N^2.

Teorema 2.2.1. *Sea L un álgebra de Lie no resoluble de dimensión ≤ 12 con factor de Levi $\mathfrak{sl}_2$, radical resoluble nilpotente N tal que N/N^2 no contenga módulos triviales. Entonces L es, salvo isomorfismo, una de las siguientes álgebras:*

(A) *L es una extensión escindida nula de $\mathfrak{sl}_2$ por uno de los módulos que aparece en el Tabla 2.3. De este modo obtenemos las álgebras:*

- *$A(n) = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n)$ para $1 \leq n \leq 8$;*
- *$A(n,m) = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(m)$ para las parejas*

$$(n,m) = (1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(4,1),(3,2),(3,3),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(6,1);$$

- *$A(n,m) = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(m) \oplus V(p)$ para las ternas*

$$(n,m,p) = (1,1,1),(2,1,1),(2,2,1),(3,1,1),(4,1,1),(3,2,1),(2,2,2);$$

- *$A(n,m,p,q) = \mathfrak{sl}_2 \oplus V(n) \oplus V(m) \oplus V(p) \oplus V(q)$ con $(n,m,p,q) = (1,1,1,1),(2,1,1,1)$.*

(L) *L un álgebra de Lie cuyo nilradical es un álgebra libre nilpotente $n_{d,t}$ y con sistema generador minimal $\mathfrak{m}$ un $\mathfrak{sl}_2$-módulo de uno de los siguientes tipos:*

- *N.1. $B(1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,2}$ donde $n_{2,2} = \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle [v_{-1}, v_1]\rangle$.*
- *N.2. $B(2;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{3,2}$ donde*

$$n_{3,2} = \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle [v_0, v_2], [v_{-2}, v_2], [v_{-2}, v_0]\rangle.$$

- *N.40. $C(1;0;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,3}$ donde*

$$n_{2,3} = \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle [v_{-1}, v_1]\rangle \oplus \langle [[v_{-1}, v_1], v_1], [v_{-1}, v_1], v_{-1}]\rangle.$$

- *N.46. $D(1;0;1;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,4}$ donde*

$$\begin{aligned} n_{2,4} = {} & \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle [v_{-1}, v_1]\rangle \oplus \langle [[v_{-1}, v_1], v_1], [[v_{-1}, v_1], v_{-1}]\rangle \\ & \oplus \langle [[[v_{-1}, v_1], v_1], v_1], [[[v_{-1}, v_1], v_1], v_{-1}], [[[v_{-1}, v_1], v_{-1}], v_{-1}]\rangle. \end{aligned}$$

(B) *El nilradical de L es un álgebra meta-abeliana de tipo $2 \leq d \leq 9$ y, de forma general, se obtiene como cociente del álgebra libre $n_{d,2}$ por un $\mathfrak{sl}_2$-submódulo propio I de la subálgebra derivada, luego $n_{d,2}^2 = N^2 \oplus I$ con $I \neq 0$. Esta descomposición está determinada por los posibles factores de $n_{d,2}/n_{d,2}^2 = N/N^2$ como $\mathfrak{sl}_2$-módulo.*

(H) *La dimensión de N^2 es 1 y $N^2 \subseteq Z(N)$. Estas álgebras, a las que nos referiremos como* álgebras de Heisenberg generalizadas, *se definen mediante una forma bilineal simétrica $\mathfrak{sl}_2$-invariante. Por tanto, son las listadas en la tabla 2.4 como H. En ellos, cuando aparezca t o s nos referiremos a escalares en el cuerpo $\mathbb{F}$.*

- *N.3. $B(3;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_3, v_1, v_0, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle z_0\rangle$, con producto*

$$[a + tz_0, c + sz_0] = (a,c)_3,$$

donde $a, c \in \langle v_3, v_1, v_0, v_{-1}, v_{-3}\rangle$.

- *N.7. $B(1,1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle z_0\rangle$, con producto*

$$[a + b + tz_0, c + d + sz_0] = \alpha(a,c)_1 + \beta(b,d)_1 + \gamma((a,d)_1 - (b,c)_1))z_0,$$

donde $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$, $a, b \in \langle v_1, v_{-1}\rangle$ y $c, d \in \langle w_1, w_{-1}\rangle$.

- *N.18. $B(5;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_5, v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}, v_{-5}\rangle \oplus \langle z_0\rangle$, con producto*

$$[a + tz_0, b + sz_0] = (a,b)_5 z_0,$$

donde $a, b \in \langle v_5, v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}, v_{-5}\rangle$.

- *N.20.* $B(3,1;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_3,v_1,v_{-1},v_{-3}\rangle\oplus\langle w_1,w_{-1}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$, *con producto*
$$[a+b+tz_0,c+d+sz_0]=(\alpha(a,c)_3+\beta(b,d)_1)z_0,$$
donde $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, $a,c\in\langle v_3,v_1,v_{-1},v_{-3}\rangle$ *y* $b,d\in\langle w_1,w_{-1}\rangle$.
- *N.23.* $B(2,2;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_2,v_0,v_{-2}\rangle\oplus\langle w_2,w_0,w_{-2}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$, *con producto*
$$[a+b+tz_0,c+d+sz_0]=((a,d)_2-(b,c)_2)z_0,$$
donde $a,c\in\langle v_2,v_0,v_{-2}\rangle$ *y* $b,d\in\langle w_2,w_0,w_{-2}\rangle$.
- *N.26.* $B(1,1,1;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_1,v_{-1}\rangle\oplus\langle w_1,w_{-1}\rangle\oplus\langle u_1,u_{-1}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$, *con producto*
$$\begin{aligned}[a+b+c+tz_0,d+e+f+sz_0]=(&\rho_1(a,d)_1+\rho_2(b,e)_1+\rho_3(c,f)_1\\&+\rho_4((a,e)_1-(b,d)_1)+\rho_5((a,f)_1-(c,d)_1)+\rho_6((b,f)_1+(c,e)_1))z_0,\end{aligned}$$
donde $a,d\in\langle v_1,v_{-1}\rangle$, $b,e\langle w_1,w_{-1}\rangle$, $c,f\in\langle u_1,u_{-1}\rangle$ *y al menos un* $\rho_i\neq 0$.
- *N.34.* $B(7;0)=$ $mathfraksl_2\oplus\langle v_7,v_5,v_3,v_1,v_{-1},v_{-3},v_{-5},v_{-7}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$, *con producto*
$$[a+tz_0,b+sz_0]=(a,b)_7z_0,$$
donde $a,b\in\langle v_7,v_5,v_3,v_1,v_{-1},v_{-3},v_{-5},v_{-7}\rangle$.
- *N.35.* $B(3,3;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_3,v_1,v_{-1},v_{-3}\rangle\oplus\langle w_3,w_1,w_{-1},w_{-3}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$, *con producto*
$$[a+b+tz_0,c+d+sz_0]=\alpha(a,c)_3+\beta(b,d)_3+\gamma((a,d)_3-(b,c)_3),$$
donde $(\gamma,\delta,\rho)\neq(0,0,0)$, $a,c\in\langle v_3,v_1,v_{-1},v_{-3}\rangle$ *y* $b,d\in\langle w_3,w_1,w_{-1},w_{-3}\rangle$.
- *N.36.* $B(1,1,1,1;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_1,v_{-1}\rangle\oplus\langle w_1,w_{-1}\rangle\oplus\langle u_1,u_{-1}\rangle\oplus\langle p_1,p_{-1}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$ *con producto*
$$\begin{aligned}[a+b+c+d+tz_0,e+f+g+h+sz_0]=(&\rho_1(a,e)_1+\rho_2(b,f)_1+\rho_3(c,g)_1\\+\rho_4(d,h)_1++&\rho_5((a,f)_1-(b,e)_1)+\rho_6((a,g)_1-(c,e)_1)+\rho_7((a,h)_1-(d,e)_1)\\&+\rho_8((b,g)_1-(c,f)_1)+\rho_9((b,h)_1-(d,f)_1)+\rho_{10}((c,h)_1-(d,g)_1))z_0,\end{aligned}$$
donde $a,e\in\langle v_1,v_{-1}\rangle$, $b,f\in\langle w_1,w_{-1}\rangle$, $c,g\in\langle u_1,u_{-1}\rangle$, $d,h\in\langle p_1,p_{-1}\rangle$ *y algún* ρ_i *es no nulo.*
- *N.37.* $B(2,2,1;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_2,v_0,v_{-2}\rangle\oplus\langle w_2,w_0,w_{-2}\rangle\oplus\langle u_1,u_{-1}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$, *con producto*
$$[a+b+c+tz_0,d+e+f+sz_0]=(\alpha((a,e)_2-(b,d)_2)+\beta(c,f)_1)z_0,$$
donde $a,d\in\langle v_2,v_0,v_{-2}\rangle$, $b,e\in\langle w_2,w_0,w_{-2}\rangle$, $c,f\in\langle u_1,u_{-1}\rangle$ *y* $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.
- *N.38.* $B(5,1;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_5,v_3,v_1,v_{-1},v_{-3},v_{-5}\rangle\oplus\langle w_1,w_{-1}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$, *con producto*
$$[a+b+tz_0,c+d+sz_0]=(\alpha(a,c)_5+\beta(b,d)_1)z_0,$$
donde $a,c\in\langle v_5,v_3,v_1,v_{-1},v_{-3},v_{-5}\rangle$ *y* $b,d\in\langle w_1,w_{-1}\rangle$ *y* $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$.
- *N.39.* $B(3,1,1;0)=\mathfrak{sl}_2\oplus\langle v_3,v_1,v_{-1},v_{-3}\rangle\oplus\langle w_1,w_{-1}\rangle\oplus\langle u_1,u_{-1}\rangle\oplus\langle z_0\rangle$ *con producto*
$$[a+b+c+tz_0,d+e+f+sz_0]=(\alpha(a,d)_3+\beta(b,e)_1+\gamma(c,f)_1+\delta((b,f)_1-(c,e)_1))z_0,$$
donde $a,d\in\langle v_5,v_3,v_1,v_{-1},v_{-3},v_{-5}\rangle$, $b,e\in\langle w_1,w_{-1}\rangle$, $c,f\in\langle u_1,u_{-1}\rangle$ *y* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\neq(0,0,0,0)$.

(HD) *La dimensión de N^2 es 1 y $N^2 \subsetneq Z(N)$. En este caso, L descompone como suma de una álgebra de Heisenberg generalizada y un submódulo abeliano.*

- *N.13.* $B(2,1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus (n_{2,2} \boxplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle)$, *donde* $B(1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,2}$ *y* $A(2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle$ *son subálgebras.*
- *N.28.* $B(4,1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus (n_{2,2} \boxplus \langle v_4, v_2, v_0, v_{-2}, v_{-4}\rangle)$ *donde* $B(1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,2}$ *y* $A(4) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_4, v_2, v_0, v_{-2}, v_{-4}\rangle$ *son subálgebras.*
- *N.29.* $B(3,2;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus ((\langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle z_0\rangle) \boxplus \langle w_2, w_0, w_{-2}\rangle)$, *donde* $B(3;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle z_0\rangle$ *y* $A(2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle$ *son subálgebras.*
- *N.32.* $B(2,1,1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus ((\langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_1, u_{-1}\rangle \oplus \langle z_0\rangle) \boxplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle)$ *donde* $B(1,1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_1, u_{-1}\rangle \oplus \langle z_0\rangle$ *y* $A(2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle$ *son subálgebras.*

(CL) *Si la dimensión de N^2 es ≥ 2 y N^2 e I no contienen módulos irreducibles isomorfos. Presentamos estas álgebras en la forma $V \oplus \frac{\Lambda^2 V}{I}$ cuyo producto es*

$$[a + (b + I), c + (d + I)] = (a \wedge c) + I.$$

Con la notación $((G))$ indicaremos los $\mathfrak{sl}_2$-submódulos generados por el conjunto generador G.

- *N.4.* $B(3;4) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \Lambda^2\langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle/I$ *con*
$$I = ((v_{-3} \wedge v_1 - v_3 \wedge v_{-1})).$$
- *N.5.* $B(1,1;0,0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \Lambda^2(\langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle)/I$ *con* $I = V(2) = ((v_{-1} \wedge w_{-1}))$.
- *N.8.* $B(1,1;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \Lambda^2(\langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle)/I$ *con*
$$I = 3V(0) = \langle v_{-1} \wedge w_{-1}, v_1 \wedge w_1, v_{-1} \wedge w_1 - v_{-1} \wedge w_1\rangle.$$
- *N.11.* $B(4;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_4, v_2, v_0, v_{-2}, v_{-4}\rangle \oplus \Lambda^2\langle v_4, v_2, v_0, v_{-2}, v_{-4}\rangle/I$ *con*
$$I = V(6) = ((v_4 \wedge v_2)).$$
- *N.12.* $B(2,1;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \Lambda^2(\langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle)/I$ *con* $I = ((v_2 \wedge w_1, v_0 \wedge v_2, w_1 \wedge w_{-1}))$.
- *N.14.* $B(2,1;1,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \Lambda^2(\langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle)/I$ *con* $I = V(3) \oplus V(2) = ((v_2 \wedge w_1, v_0 \wedge v_2))$.
- *N.16.* $B(2,1;3) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \Lambda^2(\langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle)/I$ *con* $I = (w_{-1} \wedge v_0 - w_1 \wedge v_{-2}, v_0 \wedge v_2, w_1 \wedge w_{-1}))$.
- *N.19.* $B(3,1;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus V \oplus \Lambda^2 V/I$ *con* $V = \langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle$ *e*
$$I = ((v_3 \wedge w_1, v_1 \wedge v_3, w_{-1} \wedge w_1, v_{-3} \wedge v_3 - 3v_{-1} \wedge v_1)).$$
- *N.21.* $B(3,1;0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \Lambda^2(\langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle)/I$ *con* $I = ((v_3 \wedge w_1, v_1 \wedge v_3, w_{-1} \wedge v_{-1} - w_1 \wedge v_{-3}))$.
- *N.30.* $B(3,2;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle w_2, w_0, w_{-1}\rangle \oplus \Lambda^2(\langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \oplus \langle w_2, w_0, w_{-1}\rangle)/I$ *con* $I = ((v_3 \wedge w_2, v_3 \wedge v_1, v_1 \wedge w_2 + v_3 \wedge w_0, v_{-3} \wedge v_3 - 3v_{-1} \wedge v_1))$.

(CLD) *Si la dimensión de N^2 es ≥ 2 y N^2 e I no contienen módulos irreducibles isomorfos. Además, $N^2 \subsetneq Z(N)$.*

- *N.15.* $B(2,1;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus (n_{3,2} \boxplus \langle v_1, v_{-1}\rangle)$, *donde* $B(2;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,2}$ *y* $A(1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle$ *son subálgebras.*

- *N.17.* $B(2,1;2,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus (n_{3,2} \boxplus n_{2,2})$, *donde* $B(2;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{3,2}$ *y* $B(1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,2}$ *son subálgebras.*

(M) *Si* I *y* N^2 *contienen módulos irreducibles isomorfos, dependiendo de la descomposición de* N/N^2 *llegamos a*

- *N.6.* $B(1,1;0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle x_0, y_0\rangle$ *cuyo producto es*

$$[a + b + tx_0 + sy_0, c + d + t'x_0 + s'y_0] = (\alpha(a,b)_1 + \beta(c,d)_1 \\ + \gamma((a,d)_1 - (b,c)_1))x_0 + (\alpha'(a,b)_1 + \beta'(c,d)_1 + \gamma'((a,d)_1 - (b,c)_1))y_0,$$

con $a, b \in \langle v_1, v_{-1}\rangle$, $c, d \in \langle w_1, w_{-1}\rangle$ *y* $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$, $(\alpha',\beta',\gamma') \neq (0,0,0)$.

- *N.9.* $B(1,1;2,0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_2, u_0, u_{-2}\rangle \oplus \langle x_0, y_0\rangle$ *cuyo producto es*

$$[a + b + c + tx_0 + sy_0, e + f + g + t'x_0 + s'y_0] = (a,d)_0 - (b,c)_0 + (\alpha(a,b)_1 \\ + \beta(c,d)_1 + \gamma((a,d)_1 - (b,c)_1))x_0 + (\alpha'(a,b)_1 + \beta'(c,d)_1 + \gamma'((a,d)_1 - (b,c)_1))y_0,$$

donde $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$, $(\alpha',\beta',\gamma') \neq (0,0,0)$.

- *N.10.* $B(1,1;2,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_2, u_0, u_{-2}\rangle \oplus \langle x_0\rangle$ *con producto*

$$[a + b + c + tx_0 + sy_0, e + f + g + t'x_0 + s'y_0] = (a,d)_0 - (b,c)_0 \\ + (\alpha(a,b)_1 + \beta(c,d)_1 + \gamma((a,d)_1 - (b,c)_1))x_0,$$

donde $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$.

- *N.22.* $B(2,2;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_2, w_0, w_{-2}\rangle \oplus \langle u_2, u_0, u_{-2}\rangle$ *cuyo producto es*

$$[a + b + c, d + e + f] = \alpha(a,d)_1 + \beta(b,e)_1 + \gamma((a,e)_1 - (b,d)_1),$$

donde $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$ *y* $a, d \in \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle$, $b, e \in \langle w_2, w_0, w_{-2}\rangle$.

- *N.24.* $B(1,1,1;0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_1, u_{-1}\rangle \oplus \langle x_0, y_0\rangle$ *con producto*

$$[a + b + c + tx_0 + sy_0, d + e + f + t'x_0 + s'y_0] = (\alpha(a,d)_1 + \beta(b,e)_1 + \gamma(c,f)_1 \\ + \delta((a,e)_1 - (b,d)_1) + \rho((a,f)_1 - (c,d)_1) + \mu((b,f)_1 - (c,e)_1))x_0 + (\alpha'(a,d)_1 \\ + \beta'(b,e)_1 + \gamma'(c,f)_1 + \delta'((a,e)_1 - (b,d)_1) + \rho'((a,f)_1 - (c,d)_1) + \mu((b,f)_1 - (c,e)_1))y_0,$$

donde $a, d \in \langle v_1, v_{-1}\rangle$, $b, e \in \langle w_1, w_{-1}\rangle$, $c, f \in \langle u_1, u_{-1}\rangle$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\rho,\mu) \neq (0,0,0,0,0,0))$ *y* $(\alpha',\beta',\gamma',\delta',\rho',\mu') \neq (0,0,0,0,0,0)$.

- *N.25.* $B(1,1,1;0,0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_1, u_{-1}\rangle \oplus \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ *cuyo producto es*

$$[a + b + c + tx_0 + sy_0, d + e + f + t'x_0 + s'y_0] = (\alpha(a,d)_1 + \beta(b,e)_1 \\ + \gamma(c,f)_1 + \delta((a,e)_1 - (b,d)_1) + \rho((a,f)_1 - (c,d)_1) + \mu((b,f)_1 - (c,e)_1))x_0 \\ + (\alpha'(a,d)_1 + \beta'(b,e)_1 + \gamma'(c,f)_1 + \delta'((a,e)_1 - (b,d)_1) + \rho'((a,f)_1 - (c,d)_1) \\ + \mu'((b,f)_1 - (c,e)_1))y_0 + (\alpha''(a,d)_1 + \beta''(b,e)_1 + \gamma''(c,f)_1 + \delta''((a,e)_1 - (b,d)_1) \\ + \rho''((a,f)_1 - (c,d)_1) + \mu''((b,f)_1 - (c,e)_1))z_0,$$

donde $a, d \in \langle v_1, v_{-1}\rangle$, $b, e \in \langle w_1, w_{-1}\rangle$, $c, f \in \langle u_1, u_{-1}\rangle$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\rho,\mu) \neq (0,0,0,0,0,0)$, $(\alpha',\beta',\gamma',\delta',\rho',\mu') \neq (0,0,0,0,0,0)$, $(\alpha'',\beta'',\gamma'',\delta'',\rho'',\mu'') \neq (0,0,0,0,0,0)$.

- *N.31.* $B(2,1,1;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle p_2, p_0, p_{-2}\rangle \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_1, u_{-1}\rangle$ *cuyo producto es*

$$[a+b+c+d, e+f+g+h] = \alpha((a,f)_1 - (b,e)_1) + \beta((a,g)_1 - (c,e)_1),$$

donde $a, e \in \langle p_2, p_0, p_{-2}\rangle$, $b, f \in \langle v_1, v_{-1}\rangle$, $c, g \in \langle w_1, w_{-1}\rangle$, $d, h \in \langle u_1, u_{-1}\rangle$ *y* $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.

- *N.33.* $B(2,1,1;0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus (\langle p_2, p_0, p_{-2}\rangle \boxplus (\langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle x_0, y_0\rangle))$ *donde* $A(2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle p_2, p_0, p_{-2}\rangle$ *y* $B(1,1;0,0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle x_0, y_0\rangle$.

(O) *El índice de nilpotencia de* N *es* ≥ 3 *con lo que* L *es una de las siguientes álgebras*

- *N. 41.* $C(2;2;2) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_2, w_0, w_{-2}\rangle \oplus \langle u_2, u_0, u_{-2}\rangle$ *con producto* $[a+b+c, d+e+f] = \alpha(a,d)_1 + \beta((a,e)_1 + (b,d)_1)$ *donde* $a, d \in \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle$, $b, e \in \langle w_2, w_0, w_{-2}\rangle$, $c, f \in \langle u_2, u_0, u_{-2}\rangle$ *y* $\alpha \cdot \beta \neq 0$.
- *N.42.* $C(1,1;0;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus (\langle v_1, v_{-1}\rangle \boxplus n_{2,3})$ *donde* $A(1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle$ *y* $C(1;0;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,3}$.
- *N.43.* $C(2,1;1;0) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle u_1, u_{-1}\rangle \oplus \langle z_0\rangle$ *cuyo producto es*

$$[a+b+c+tz_0, d+e+f+sz_0] = \alpha((a,e)_1 - (b,d)_1) + \gamma((b,f)_1 - (c,e)_1)z_0,$$

donde $\alpha \cdot \gamma \neq 0$ *y* $a, d \in \langle v_2, v_0, v_{-2}\rangle$, $b, e \in \langle w_1, w_{-1}\rangle$ *y* $c, f \in \langle u_1, u_{-1}\rangle$.

- *N.44.* $C(3,1;0;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus (\langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle \boxplus n_{2,3})$ *donde* $A(3) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle$ *y* $C(1;0;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,3}$.
- *N.45.* $C(1,1,1;0;1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle v_1, v_{-1}\rangle \oplus \langle w_1, w_{-1}\rangle \oplus \langle t_1, t_{-1}\rangle \oplus \langle z_0\rangle \oplus \langle u_1, u_{-1}\rangle$ *cuyo producto es o bien*
  - $[a+b+c+\alpha z+d, e+f+g+\beta z+h] = \rho((a,f)_1 + (b,e)_1)z_0 + \gamma((c,\beta z)_0 - (\alpha z, g)_0)$, *donde* $\rho \cdot \gamma \neq 0$ *o bien,*
  - $[a+b+c+\alpha z+d, e+f+g+\beta z+h] = \rho(a,e)_1 z_0 + \theta((a,\beta z)_0 - (\alpha z, e)_0)$ *donde* $\rho \cdot \theta \neq 0$

  donde $a, d \in \langle v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}\rangle$, $b, e \in \langle w_1, w_{-1}\rangle$ *y* $c, f \in \langle u_1, u_{-1}\rangle$.

Demostración. Sea L un álgebra de Lie con las imposiciones fijadas en el Teorema. Por el Lema 2.1.6 sabemos que el orden de nilpotencia del nilradical N es a lo sumo 4. Atacamos la demostración analizando las álgebras en función del orden de nilpotencia de N.

Si el índice de nipotencia, t, es 1, obtendremos un nilradical abeliano, es decir, $N^2 = 0$. En ese caso, el álgebra L será una extensión escidida nula donde N es un $\mathfrak{sl}_2$-módulo. Las posibilidades quedan recogidas en la tabla 2.3 y las álgebra son las correspondientes al apartado (A).

Si $t \geq 2$ sabemos por el Teorema 1.3.3 que todas las álgebras nilpotentes que aceptan a $\mathfrak{sl}_2$ como factor de Levi son cocientes de $n_{d,t}$ por un $\mathfrak{sl}_2$-ideal I contenido en el álgebra derivada de la libre y tal que $n_{d,t}^t \not\subseteq I$.

Si $I = 0$, entonces el nilradical N es una libre y obtendremos por dimensiones las opciones $n_{2,2}$, $n_{3,2}$, $n_{2,3}$ y $n_{2,4}$ que son las que se encuentran bajo la etiqueta L en la tabla 2.4 y se corresponden con el apartado (L).

Suponemos, a partir de ahora, que $I \neq 0$. Para $t = 2$, el nilradical $N = n_{d,2}/I = V \oplus n_{d,2}^2/I$ donde V es uno de los módulos que aparecen como nilradical de las escindidas nulas con $\dim(V) \leq 8$. Así, en el caso $d = 8$ necesitamos que $n_{8,2}^2$ contenga al menos un módulo trivial y el ideal I debe contener a todos los submódulos restantes. Si $d = 7$, $n_{7,2}^2$ debe contener o uno o dos módulos triviales o un módulo $V(1)$ y el ideal I debe contener al resto. Para $d = 6$ deberíamos tener al menos un módulo trivial, un módulo $V(1)$ o un módulo $V(2)$. Los casos $d = 4, 5$ son fáciles de analizar desde la tabla. Con estas observaciones vamos a distinguir dos situaciones distintas:

1. El complemento de I en $n_{d,2}^2$ e I no contienen módulos irreducibles isomorfos. De esta manera, I estará completamente determinado dando lugar a una única álgebra. El cálculo de las constantes de estructura en este caso es fácil desde el cociente una vez localizados los elementos del $\mathfrak{sl}_2$-ideal I dentro de $\Lambda^2 V$. Las álgebras que se construyen aparecen en la tabla 2.4 bajo la etiqueta CL y CLD. Estas álgebras constituyen los bloques (CL) y (CLD) para las distintas posibilidades de I. La construcción de estas álgebras se ve más detalladamente en el ejemplo 2.2.3.

2. El complemento de I en $n_{d,2}^2$ e I tienen módulos irreducibles isomorfos en su descomposición. De este modo, tendremos un número infinito de opciones al seleccionar la descomposición I. Con lo que los correspondientes cocientes generarán familias paramétricas.

   Muchas de las opciones que nos encontramos en este caso presentan estructura de álgebra de Heisenberg con lo que diferenciaremos entre:

   - La dimensión de $n_{d,2}^2/I$ es 1. Se trata de un álgebra de Heisenberg generalizada (degenerada o no) y las álgebras que lo cumplen se encuentran en la tabla bajo la etiqueta H. En este caso, el producto en (H) estará determinado por una forma bilineal $\mathfrak{sl}_2$-invariante antisimétrica φ que, para módulos de la simple split 3-dimensional $\mathfrak{sl}_2$ se pueden determiar fácilmente usando múltiplos escalares de transvecciones. Si φ es degenerada, el álgebra será descomponible y si no lo es puede serlo o no.

     De hecho tenemos que un álgebra de Heisenberg, (H, φ) descompone en suma de dos ideales si y solamente si φ es degenerada. En este caso, escribimos $H^\perp = H^2 \oplus A$ y tenemos que $H = (V \oplus H^2) \oplus A$ es una descomposición de H en suma de ideales y, como H^2 y $H^\perp$ son módulos, entonces podemos tomar A como submódulo. Si A es trivial, entonces tendremos descomposición de L en dos ideales.

     Dado que la construcción en todas ellas es similar, trataremos únicamente un ejemplo que se puede ver en el ejemplo 2.2.2.

   - Por último, la situación de dimensión de $n_{d,2}^2/I$ es > 1 nos genera 8 casos, que atendiendo a su descomposición en antisimétricos y mediante transvecciones somos capaces de localizar.

Suponemos ahora que el índice de nilpotencia es ≥ 3 y nilradical no libre contempla cinco casos diferentes para los que utilizaremos o bien la técnica de corte por el ideal o bien la construcción directa.

La construcción directa se realiza aplicando el Teorema 1.3.6 y teniendo en cuenta que $N^2/N^3 \subseteq \frac{m \otimes \Lambda^2 m}{\Lambda^3 m}$ y, bajo esta restricción junto a la limitación de tamaño, llegamos a que las únicas posibilidades que nos encontramos atendiendo a Tabla 2.2 son

- $V(1) \oplus V(0) \oplus V(1)$,
- $V(2) \oplus V(2) \oplus V(2)$,
- $V(3) \oplus V(0) \oplus V(3)$,
- $2V(1) \oplus V(0) \oplus V(1)$,
- $2V(1) \oplus V(0) \oplus 2V(1)$,
- $(V(2) \oplus V(1)) \oplus V(1) \oplus V(1)$,
- $(V(2) \oplus V(1)) \oplus V(1) \oplus V(0)$,
- $(V(2) \oplus V(1)) \oplus V(0) \oplus V(1)$,
- $(V(2) \oplus V(1)) \oplus V(0) \oplus V(2)$,
- $V(5) \oplus V(0) \oplus V(1)$,
- $(V(3) \oplus V(1)) \oplus V(0) \oplus V(1)$ y
- $3V(1) \oplus V(0) \oplus V(1)$.

De estas opciones tenemos que comprobar que cumplen las propiedades de álgebra de Lie, es decir, la antisimetría y la identidad de Jacobi. La antisimetría se consigue mediante la construcción que hemos realizado, pero de las álgebras obtenidas algunas no cumplen la identidad de Jacobi con lo que dichos casos quedan descartados. Tratamos las restricciones se le exigen a cada una de las álgebras debidas a la identidad de Jacobi como se muestra en el ejemplo 2.2.4.

Por otra parte, el álgebra que se obtienen para $t = 4$ es un álgebra libre que ya ha sido analizada. De esta manera obtenemos las álgebras de Lie detalladas en (O). $\square$

Ejemplo 2.2.1. Ejemplificamos el álgebra $A(2,1)$ con nilradical abeliano determinando para ello cómo actúa $\mathfrak{sl}_2$ en $V(1) \oplus V(2)$. No incluimos los productos de $\mathfrak{sl}_2$ en sí mismo porque son los ya conocidos. De esta forma los productos del álgebra simple sobre sus módulos son

$$\begin{array}{lll} [e, v_1] = 0, & [f, v_1] = v_{-1}, & [h, v_1] = v_1, \\ [e, v_{-1}] = v_1, & [f, v_{-1}] = 0, & [h, v_{-1}] = -v_{-1}, \\ [e, v_2] = 0, & [f, v_2] = 2v_0, & [h, v_2] = 2v_2, \\ [e, v_0] = v_2, & [f, v_0] = v_{-2}, & [h, v_0] = 0, \\ [e, v_{-2}] = 2v_0, & [f, v_{-2}] = 0, & [h, v_{-2}] = -2v_{-2}. \end{array}$$

como queda recorregido en la Figura 2.1.

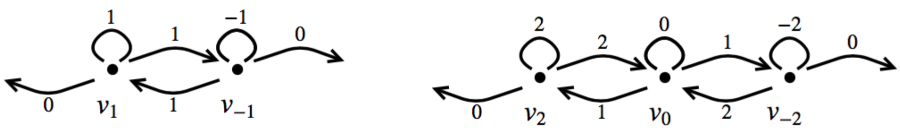


Figura 2.1: Acción de $\mathfrak{sl}_2$ sobre $V(1) \oplus V(2)$.

Ejemplo 2.2.2. Dentro de las Heisenberg, etiquetadas con una (H), hay algún caso donde el nilradical puede ser descomponible dependiendo del valor de las variables. Veamos como ejemplo el álgebra con nilradical $N = 2V(1) \oplus V(0)$ donde $I = V(2) \oplus V(0)$.

Fijamos como base para $n_{4,2}/n_{4,2}^2$ a $V(1) = \{v_{-1}, v_1\}$, $V(1) = \{w_{-1}, w_1\}$ y estudiamos los pesos 0 de los productos exteriores para obtener $V(0)$. Existen 4 elementos que se asocian al peso 0: uno presente en $V(2)$, dado por $v_{-1} \wedge w_1 + w_{-1} \wedge v_1$, y tres que se encuentran en $3V(0)$, que son $v_{-1} \wedge v_1$, $w_{-1} \wedge w_1$ y $v_{-1} \wedge w_1 - w_{-1} \wedge v_1$.

La manera de localizar el peso 0 en $V(2)$ es aplicar $e \in \mathfrak{sl}_2$ al peso 2 presente en $V(2)$. Este peso se consigue mediante el producto exterior de $w_1 \wedge v_1$, con lo que aplicando una vez e obtendríamos el peso 0. Para localizar el peso 0 del producto cruzado debemos aplicar $\mathfrak{sl}_2$ a $\alpha v_{-1} \wedge w_1 + \beta w_{-1} \wedge v_1$ y con ello obtenemos $\alpha = \beta$.

Dado que $V(2) \subset I$ entonces $v_{-1} \wedge w_1 + w_{-1} \wedge v_1 = 0$ con lo que $3V(0)$ estará generado por $\langle v_{-1} \wedge v_1, w_{-1} \wedge w_1, v_{-1} \wedge w_1 \rangle$. Por ello, el $N^2 = V(0) = \langle \alpha v_{-1} \wedge v_1 + \beta w_{-1} \wedge w_1 + \gamma v_{-1} \wedge w_1 \rangle$ y la matriz que alberga los productos es

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \gamma \\ -\alpha & 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \beta \\ -\gamma & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, si las $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ podemos reescalar, sin pérdida de generalidad, una de las variables y establecer $\alpha = 1$ obteniendo una familia de álgebras biparamétrica, si dos variables son $\neq 0$ y una es 0, nos encontramos en una familia de álgebras uniparamétrica y si solo una variable es $\neq 0$ entonces hallaremos un único álgebra.

Cabe destacar que si solo una única variable es distinta de 0, el nilradical será descomponible en dos ideales: uno abeliano que será $n_{2,1}$ y otro meta-abeliano que vendrá dado por $n_{2,2}$.

Ejemplo 2.2.3. Vemos como se construye $N = V(3) \oplus V(0)$. Establecemos para $V(3)$ una base que será $\{v_{-3}, v_{-1}, v_1, v_3\}$ donde cada elemento representará al peso que tiene por subíndice. Para construir el álgebra debemos especificar las constantes de estructura y por ello, debemos de encontrar los productos exteriores que generan $I = V(4)$ para hacerlos cero y el peso 0 asociado a $V(0)$. Para hallar el módulo $V(4)$ escogemos el elemento de peso -4 y aplicamos $e \in \mathfrak{sl}_2$ para obtener todos los elementos hasta llegar al de peso 4, así

$$V(4) = \langle v_{-3} \wedge v_{-1}, e \cdot (v_{-3} \wedge v_{-1}), e \cdot (e \cdot (v_{-3} \wedge v_{-1})), e \cdot (e \cdot (v_{-3} \wedge v_{-1})), v_1 \wedge v_3 \rangle.$$

Ejemplo 2.2.4. Veamos cómo se aplica Jacobi en dos álgebras de Lie.

- $C(2,1;0;1)$, donde dados $a, e \in V(2), b, f \in V(1), c, g \in V(0), d, h \in V(1) = N^3$ el producto se define como

  $$[a + b + c + d, e + f + g + h] = \alpha(a, f)_1 + \beta(b, f)_1 + \gamma(b, g)_0 - \alpha(e, b)_1 - \gamma(f, c)_0,$$

  con $\gamma, \beta \neq 0$ y exigiendo que se cumpla la identidad de Jacobi. Tomamos dos elementos de $V(1)$ y uno de $V(2)$ quedando la identidad

  $$[x, [y, c]] + [y, [c, x]] + [c, [x, y]] = 0,$$

  para $c \in V(2)$. Esto es equivalente a que

  $$\alpha\gamma \left(\frac{\partial c}{\partial x} x + \frac{\partial c}{\partial y} y \right) = 0,$$

  y como $\gamma \neq 0$, se tiene que tener que $\alpha = 0$.

- $C(2,1;1;0)$, donde dados $a, e \in V(2), b, f \in V(1), c, g \in V(1), d, h \in V(0)$ el producto se define como

  $$[a + b + c + d, e + f + g + h] = \alpha(a, f)_1 + \beta(b, f)_1 + \gamma(b, g)_1 - \alpha(e, b)_1 - \gamma(f, c)_1,$$

  con $\alpha, \gamma \neq 0$ y exigiendo que se cumpla la identidad de Jacobi. Tomamos dos elementos de $V(1)$ y uno de $V(2)$ quedando la identidad

  $$[x, [y, c]] + [y, [c, x]] + [c, [x, y]] = 0,$$

  para $c \in V(2)$. Esto es equivalente a que

  $$\beta\alpha \left(\frac{\partial c}{\partial x} x + \frac{\partial c}{\partial y} y \right) = 0,$$

  y como $\alpha \neq 0$, se tiene que tener que $\beta = 0$.

Antes de tratar los casos que nos quedan para clasificar todas las álgebras de Lie con factor de Levi simple introduciremos el siguiente lema que nos permitirá descartar a $\mathfrak{so}_5$ como candidata. Realmente el siguiente lema nos permite acotar el tamaño de los módulos irreducibles.

Lema 2.2.2. *Sea S un álgebra de Lie simple y sea V un S-módulo irreducible y no trivial de dimensión d. Al representación asociada a V dada por $\rho\colon S \to \mathfrak{gl}(V)$ deberá cumplir*

$$S/\ker(\rho) \cong \rho(S) \leq \mathfrak{gl}(V).$$

Con lo que la dimensión de $S/\ker\rho$ es $\leq d^2$.

Corolario 2.2.3. *Dada $L = S \oplus_\rho R$ un álgebra de Lie con $\dim(L) \leq 12$ se tiene que*

a) si $S = \mathfrak{so}_5$ no existen álgebras de Lie posibles con $R \neq 0$ y

b) si $S = \mathfrak{sl}_3$ entonces la dimensión de los módulos irreducibles no triviales puede ser 3 o 4.

Demostración. Para demostrar el corolario echaremos mano del lema 2.2.2.

Sea $\rho\colon S \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación irreducible y no trivial. Por ello, V es un S-módulo que tiene por dimensión d. Aplicando el lema anterior

$$\dim(S/\ker\rho) \leq d^2.$$

Analicemos cada uno de los casos para el factor de Levi a ver qué ocurre.

Como $S = \mathfrak{so}_5$ es simple, solo existe una posibilidad no trivial para $\ker\rho$ ya que $\ker\rho \trianglelefteq S$, con lo que $\ker\rho = 0$. Este hecho implica que $\dim(S) = 10 \leq d^2$ de modo que $d \geq 4$, pero para esos valores la dimensión de L supera doce con lo que no existen álgebras de Lie resultantes.

Por último en el caso de $S = \mathfrak{sl}_3$ al ser simple la única opción es que $\ker(\rho) = 0$ de tal manera que $dim(S) = 8 \leq d^2$. De aquí se deduce que $d \geq 3$ y como $\dim(L) \leq 12$ entonces d solo puede ser 3 o 4. □

Con este corolario solo nos queda encontrar las álgebras de Lie que se construyen como $L = \mathfrak{sl}_3 \oplus R$ con $\dim(R) = 3$ o 4. Dado que el tamaño de los módulos irreducibles de $\mathfrak{sl}_3$ es

$$\frac{(m_1+1)(m_2+1)(m_1+m_2+2)}{2}$$

para $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ entonces el tamaño del módulo puede ser únicamente 3 para $m_1 = 1$ y $m_2 = 0$ y viceversa.

La única posibilidad que tenemos para R en este caso es dimensión 3. Esto proporciona los módulos irreducibles naturales V y V^*, explicados en la sección 1.2.2. Así pues, tenemos las posibilidades

- $\mathfrak{sl}_3 \boxplus R$, con R un álgebra de Lie resoluble de dimensión 1, 2 o 3.
- La extensión escindida nula $\mathfrak{sl}_3 \oplus V$.
- La extensión escindida nula $\mathfrak{sl}_3 \oplus V^*$.
- $\mathfrak{so}_5 \boxplus R$, con R un álgebra de Lie resoluble de dimensión 0, 1 o 2.

Una vez clasificadas las álgebras de Lie para el factor de Levi simple, ya estamos en condiciones de enfrentarnos a un álgebra de Lie no resoluble cuyo factor de Levi sea semisimple y no simple.

Teorema 2.2.4. *Salvo isomorfismos, las álgebras de Lie L con factor de Levi no simple y de dimensión ≤ 12 son de uno de los siguientes tipos:*

- *Si el factor de Levi de L es un ideal, o bien L es semisimple o bien $L = S \boxplus R$ con R un álgebra de Lie resoluble. Por dimensión, las posibles son:*

  (I) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_2$,

  (II) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_2 \boxplus R$ *con* $0 \leq \dim(R) \leq 3$,

  (III) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_3$, $\mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_3 \boxplus \mathbb{F} \cdot x$,

  (IV) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_2 \boxplus R$ *con* $0 \leq \dim R \leq 6$.

- *Si el factor de Levi de L no es ideal pero L tiene ideales simples, entonces:*

(V) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus (\mathfrak{sl}_2 \oplus A(n))$, *con* $n = 1, 2$;

(VI) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus (\mathfrak{sl}_2 \oplus A(1,0))$;

(VII) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus (\mathfrak{sl}_2 \oplus B(1;0))$;

(VIII) $\mathfrak{sl}_2 \boxplus (\mathfrak{sl}_2 \oplus R)$ *con* $2 \leq \dim R \leq 6$.

- *Si L no tiene ideales simples pero es descomponible, entonces*

(IX) $A(1) \boxplus A(1)$, $A(2) \boxplus A(1)$, $A(1,0)$, $B(1;0)$;

(X) $E_1 = (A(1) \oplus \mathbb{F} \cdot x) \boxplus A(1)$ *con* $[A(1)_S, x] = 0$ *y* $\mathrm{ad}_{A(1)_R}\, x = Id$;

(XI) $A(2) \boxplus A(2)$, $A(2) \boxplus A(1,0)$, $A(2) \boxplus B(1;0)$, $A(2) \boxplus E_1$, $A(1,0) \boxplus A(1,0)$, $A(1,0) \boxplus B(1;0)$, $A(1,0) \boxplus E(1)$, $B(1;0) \boxplus B(1;0)$, $B(1;0) \boxplus E_1$, $E_1 \boxplus E_1$;

(XII) $A(3) \boxplus A(1)$, $A(1,1) \boxplus A(1)$, $A(2,0) \boxplus A(1)$, $A(1,0,0) \boxplus A(1)$, $B(1,0;0) \boxplus A(1)$;

(XIII) $E_2 = (A(2) \oplus \mathbb{F} \cdot x) \boxplus A(1)$ *con* $[A(2)_S, x] = 0$ *y* $\mathrm{ad}_{A(2)_R}\, x = Id$;

(XIV) $E_3 = (A(1,0) \boxplus \mathbb{F} \cdot x) \boxplus A(1)$ *con* $[A(1,0)_S, x] = 0$ *y* $\mathrm{ad}_{A(1,0)_R}\, x = Id$;

(XV) $E_4 = E_1 \boxplus \mathbb{F} \cdot x \boxplus A(1)$, $E_5 = A(1) \boxplus \langle x, y \rangle \boxplus A(1)$ *con* $[x, y] = y$;

(XVI) $E_6 = (\mathfrak{sl}_2 \oplus n_{2,2} \oplus \mathbb{F} \cdot x) \boxplus A(1)$ *con* $[\mathfrak{sl}_2, x] = 0$, $n_{2,2} = \langle v_{-1}, v_1, u_0 \rangle$, $[v_{-1}, v_1] = u_0$ $[x, v_i] = v_i$, $[x, u_0] = 2u_0$.

(XVII) $E_7 = \mathbb{F} \cdot x \boxplus A(1) \boxplus A(1)$, $E_8 = \mathbb{F} \cdot x \boxplus \mathbb{F} \cdot y \boxplus A(1) \boxplus A(1)$, $E_9 = \langle x, y \rangle \boxplus A(1) \boxplus A(1)$ *con* $[x, y] = y$;

(XVIII) $E_{10} = \mathbb{F} \cdot x \boxplus F$, $E_{11} = \mathbb{F} \cdot x \boxplus \mathbb{F} \cdot y \boxplus F$ *y* $E_{12} = \langle x, y \rangle \boxplus F$ *con* $[x, y] = y$, $F = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus V(1) \otimes V(1)$ *extensión escindida nula;*

(XIX) $E_{13} = \mathbb{F} \cdot x \boxplus (F \oplus \mathbb{F} \cdot y)$ *con* $[y, a] = a$ *para todo* $a \in F$, $\mathbb{F} \cdot y$ *módulo trivial.*

(XX) $E_{14}(\alpha, \beta) = \mathbb{F} \cdot x \boxplus (G \oplus \mathbb{F} \cdot y)$ *con* $G = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus V(1) \otimes V(0) \oplus V(0) \otimes V(1)$ *extensión escindida nula y* $[y, a + b] = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ *para todo* $a \in V(1) \otimes V(0)$, $b \in V(0) \otimes V(1)$;

(XXI) $E_{15}(\alpha, \beta) = \mathbb{F} \cdot x \boxplus (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus H)$ *donde* $H = V(1) \otimes V(0) \oplus V(0) \otimes V(1) \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *con* $[a \otimes 1 + 1 \otimes b + ty, c \otimes 1 + 1 \otimes d + sy] = (\alpha (a, c)_1 + \beta (b, d)_1) y$, *con* $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$;

- *Si L es indescomponible:*

(XXII) *una de las extensiones escindidas nulas* $E_{16} = (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2) \oplus V(0) \otimes V(1) \oplus V(1) \otimes V(1)$, $E_{17} = (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2) \oplus (V(1) \otimes V(1))$, $E_{18} = (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2) \oplus (V(1) \otimes V(2))$;

(XXIII) $E_{19}(\alpha, \beta) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus H$ *como descrita en* (XXI) *con* $\alpha\beta \neq 0$;

(XXIV) $E_{20} = F \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *como descrita en* (XIX);

(XXV) $E_{21}(\alpha, \beta) = G \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *como descrita en* (XX) *con* $(\alpha, \beta) \neq 0$;

(XXVI) $E_{22} = G \oplus \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *con* G *como descrita en* (XX), $\mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *módulo trivial y, para todo* $a \in V(1) \otimes V(0)$, $b \in V(0) \otimes V(1)$, $[y, a + b] = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$, $[y, a + b] = \gamma \cdot a + \delta \cdot b$, $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta), (\alpha, \gamma), (\beta, \delta) \neq (0, 0)$;

(XXVII) $E_{23}(\alpha) = F \oplus \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$, F *como descrita en* (XVIII), $\mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *módulo trivial,* $[y, x] = x$, $[y, a] = \alpha a$ *con* $\alpha \neq 0$ *y* $[x, a] = 0$ *para todo* $a \in V(1) \otimes V(1)$;

(XXVIII) $E_{24}(\alpha, \beta) = G \oplus \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *con* $G \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *como descrita en* (XX) *con* $\alpha \cdot \beta \neq 0$, $[G, x] = 0$, $\mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$ *módulo trivial,* $[y, x] = x$;

(XXIX) $E_{25}(\alpha, \beta, \rho^*) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus H \oplus \mathbb{F} \cdot x$ *como descrita en* (XXI) *con* $(\alpha, \beta) \neq 0$, *y si denotamos* $A = V(1) \otimes V(0)$ *y* $B = V(0) \otimes V(1)$, *para todo* $a \in A$ *y* $b \in B$ *tenemos que* $[x, a + b + y] = \rho_1 a + \rho_2 (b + 2y)$ *si* $\alpha = 0$, $[x, a + b + y] = \rho_1 (a + 2y) + \rho_2 b$ *si* $\beta = 0$ *y* $[x, a + b + y] = \rho (a + b + 2y)$ *en otro caso.*

Demostración. Por el teorema de Levi escribimos $L = S \oplus R$ donde S es un álgebra semisimple que representa al factor de Levi de L, R es el radical resoluble de L y el par (S, R) viene determinado por dimensiones como se indica en la tabla del Lema 2.1.7. Distinguiremos varias posibilidades:

A. L tiene ideales simples. En este caso, puede ocurrir que sea semisimple con lo que obtendríamos que L se corresponde con $n\mathfrak{sl}_2$ para $2 \leq n \leq 4$ o con $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_3$. Si L tiene ideales simples y $R \neq 0$ podemos usar la Proposición 2.1.1 y descomponer $L = S_0 \boxplus (S_1 \oplus R)$ donde S_0 es un ideal semisimple de L y $L_1 = S_1 \oplus R$ es un ideal de L que no tiene ideales simples. Si $S = S_0$, entonces L es una de las álgebras listadas de (i) a (iv).

Supongamos entonces que $0 \neq S_0 \neq S$ luego $S_1 \neq 0$ y L_1 es un álgebra fiel no resoluble tal que $\dim(R) \geq 1$. Como L_1 es fiel, R no puede ser un módulo trivial, de este modo $\dim(R) \geq 2$ lo que excluye a las álgebras $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_3$ y $4\mathfrak{sl}_2$ como factores de Levi. Vamos a estudiar las distintas posibilidades para las ternas (S_0, S_1, R) (recordamos que $S_0 \oplus S_1$ es un factor de Levi de L y R el radical resoluble que es módulo trivial para S_0 y fiel para S_1):

- $(S_0, S_1, R) = (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2, R)$: en este caso la dimensión de R es 2 o 3 y $L = \mathfrak{sl}_2 \boxplus \mathfrak{sl}_2 \boxplus L_1$ con L_1 una de las siguientes álgebras de Lie $A(1)$, $A(2)$, $A(1,0)$, $B(1;0)$, de acuerdo con el Teorema 2.2.1.

- $(S_0, S_1, R) = (\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2, R)$: de nuevo la dimensión de R es 2 o 3 y, de acuerdo con el Lema 1.2.14, esto no puede ocurrir ya que 2 y 3 son primos y R es S_1-fiel.

- $(S_0, S_1, R) = (\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{sl}_2, R)$: aquí $\mathfrak{sl}_2 \oplus R$ es una de las álgebras fieles que aparecen en el Teorema 2.2.1 con la restricción $2 \leq \dim(R) \leq 6$.

Todas estas álgebras son las que aparecen en el apartado listadas desde (v) hasta ().

B. L no tiene ideales simples. Equivalentemente, la representación adjunta de S sobre R es fiel y por ello, $\dim(R) \geq 2$. El único factor de Levi posible es $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ por dimensión y $L = L_1 = S_1 \oplus R$. Analizamos varios casos:

B.1 L es descomponible, luego $L = I \boxplus J$ siendo I y J dos ideales no semisimples y, al menos uno de ellos, no resoluble. Por tanto, por el teorema de Levi, tendremos:

$$\begin{aligned} I &= I_S \oplus I_R = (I \cap S) \oplus (I \cap R) \\ J &= J_S \oplus J_R = (J \cap S) \oplus (J \cap R) \end{aligned}$$

donde $S = I_S \boxplus J_S$ es un factor de Levi que podemos suponer s.p.d.g. que es S y $R = I_R \boxplus J_R$. Si ambos ideales son no semisimples y no resolubles, I_R y J_R no pueden ser triviales como módulos para I_S y J_S porque no hay ideales simples en R, por tanto $\dim(R) \geq 4$ con $\dim(I_R), \dim(J_R) \geq 2$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\dim(I_R) \geq \dim(J_R)$ con lo que, respecto a las dimensiones, tenemos los siguientes posibles pares de dimensiones: $(\dim(I_R), \dim(J_R)) = (2,2),\ (3,2),\ (3,3), (4,2)$. Analizamos cada caso por separado, atendiendo a la estructura de $\mathfrak{sl}_2$ módulo de I_R y de J_R.

- $(\dim(I_R), \dim(J_R)) = (2,2)$. La única posibilidad es $L = A(1) \boxplus A(1)$.
- $(\dim(I_R), \dim(J_R)) = (3,2)$. Los $\mathfrak{sl}_2$-módulos de dimensión 3 pueden ser $V(2)$ o $V(1) \oplus V(0)$. Por tanto, I_R es $V(2)$ o $V(1) \oplus V(0)$ y J_R es $V(1)$. Es claro que $J = A(1)$. La primera alternativa para I_R nos proporciona el álgebra $L = A(2) \boxplus A(1)$. Supongamos entonces $I_R = V(1) \oplus V(0)$. En caso de que I_R sea nilpotente, o es abeliano en cuyo caso $I = A(1,0)$ o $I_R^2 \neq 0$ y, como I_R solo tiene dos irreducibles, $I_R^3 = 0$. De este modo, I_R es un álgebra nilpotente meta-abeliana 3 dimensional; la única posibilidad es $I_R = n_{2,2}$ luego $I = B(1;0)$. En otro caso I_R no es nilpotente luego $I_R = N \oplus V(0)$ con $N = V(1)$ el nilradical de I_R que es abeliano. Escribimos $V(0) = \mathbb{F} \cdot x$ y aplicando el Lema 2.1.5, $ad_N(x) = \alpha \cdot Id$ con $\alpha \neq 0$; reescalando x podemos suponer $\alpha = 1$.

Por tanto, $I_R = \langle x, a, b\rangle$ donde $[x, a] = a$, $[x, b] = b$, $[a, b] = 0$ y $\langle a, b\rangle = V(1)$ como I_S-módulo. Esta álgebra de Lie es $(A(1) \oplus \mathbb{F} \cdot x) \boxplus A(1)$ con $A(1) = \mathfrak{sl}_2 \oplus \langle a, b\rangle$ tal que $[\mathfrak{sl}_2, x] = 0$ la denotaremos por E_1.

- $(\dim(I_R), \dim(J_R)) = (3, 3)$: razonando igual que en el punto anterior I y J pueden ser $A(2)$, $A(1, 0)$, $B(1; 0)$ y E_1.
- $(\dim(I_R), \dim(J_R)) = (4, 2)$. Tendremos que $J = A(1)$ y para I tendremos que estudiar los casos dependiendo de:
  - Si no existen módulos triviales en I_R entonces I_R es nilpotente por el Lema 2.1.5 y, aplicando el Teorema 2.2.1, I es igual a $A(3)$ o $A(1, 1)$. En otro caso, $I_R = pV(0) \oplus W$ con $p = 1, 2$ puesto que I_R no es trivial con $W = V(2)$ para $p = 1$ y $W = V(1)$ para $p = 2$. Si I_R es abeliano entonces $I = A(2, 0)$ o $I = A(1, 0, 0)$. Si no lo es y N es el nilradical de I_R, tenemos la cadena de ideales $0 \neq I_R^2 \subseteq N \subseteq I_R$. Si $N = I_R$, por el Teorema 2.2.1 sabemos que $N/N^2 = I_R/I_R^2$ tiene dimensión ≥ 2 y contiene módulos triviales. La única posibilidad es $I_R = V(1) \oplus 2V(0))$ con $I_R/I_R^2 = V(1) \oplus V(0)$ y $I_R^2 = V(0)$. En este caso $I_R^3 = 0$ luego N es meta-abeliana. Tomamos la base estándar del módulo $V(1) \oplus V(0) = \langle v_{-1}, v_1, v_0\rangle$, $I_R^2 = \langle w_0\rangle$ y observamos que $[v_{-1}, v_1] = \alpha w_0$ y que $[v_{-1}, v_0] = [v_1, v_0] = 0$ porque ± 1 no son pesos en N^2, luego $\alpha \neq 0$ y, reescalando w_0 podemos suponer que $\alpha = 1$. En este caso llegamos a que $I = B(1, 0; 0)$. Finalmente, estudiaremos el caso $I_R = pV(0) \oplus W \neq N$, para el que puede ocurrir:
    - ◇ $N = V(2)$ e $I_R = N \oplus V(0)$. En este caso, $N^2 = 0$ y si $V(0) = \mathbb{F} \cdot x$ entonces $\mathrm{ad}_N(x) = \alpha Id$ con $\alpha \neq 0$ aplicando el Lema 2.1.5. Sin pérdida de generalidad tomamos $\alpha = 1$ y, el álgebra $I_R = \langle x, a, b, c\rangle$ con $[x, a] = a$, $[x, b] = b$, $[x, c] = c$ y el resto de los productos nulos. Esta álgebra la denotaremos como E_2.
    - ◇ $N = V(1)$ e $I_R = N \oplus 2V(0)$. Aquí, $V(1) = \langle v_{-1}, v_1\rangle$ y $2V(0) = \langle u_0, v_0\rangle$. Por el Lema 2.1.5 y reescalando u_0 y v_0 si es necesario, tenemos que $[x, v_i] = v_i$ para $x = u_0, v_0$ e $i = \pm 1$; entonces, $u_0 - v_0 \in Z(L) \subseteq N$, una contradición.
    - ◇ $N = V(1) \oplus V(0)$ e $I_R = N \oplus V(0)$. Escribimos $N = \langle v_{-1}, v_1, u_0\rangle$ e $I_R = N \oplus \langle v_0\rangle$. Si $N^2 = 0$, aplicando de nuevo el Lema 2.1.5, llegamos a que $[v_0, u_0] = \alpha u_0$, $[v_0, v_i] = \beta v_i$ con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Reescalando v_1, v_{-1} y/o u_0 podemos suponer $(\alpha, \beta) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$. Esto nos proporciona las álgebras E_3, E_4, E_5. Si $N^2 \neq 0$, como $N^3 = 0$ $N = n_{2,2}$, aplicando el [2, Teorema 5.1], $I_R = \langle v_{-1}, v_1, u_0, v_0\rangle$ donde $[v_0, v_i] = v_i$, $[v_0, u_0] = 2u_0$ y $[v_1, v_{-1}] = u_0$. Esta álgebra es la xii) del Teorema 5.1. Así obtenemos E_6

Nos queda por analizar que J sea resoluble e I sea no semisimple y no resoluble. En este caso, el ideal I es un álgebra de Lie de dimensión ≤ 11 con factor de Levi $I_S = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ y radical resoluble no nulo. Por tanto, la subálgebra $I_S = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 = S$ es el factor de Levi de L y como $[I, J] = 0$, $J = pV(0)$ es módulo trivial para S con $p \geq 1$. Observamos que I no puede tener ideales simples ya que L no los tiene; por tanto, I_R es un I_S-módulo fiel de dimensión ≤ 5. Por el Lema 1.2.14 la dimensión de R debe ser 4 o 5. En el caso 4-dimensional I_R como I_S-módulo es $V(1) \otimes V(1)$ o $V(0) \otimes V(1) \oplus V(1) \otimes V(0)$ y en caso 5-dimensional $I_R = V(1) \otimes V(1) \oplus V(0) \otimes V(0)$ o $V(0) \otimes V(1) \oplus V(1) \otimes V(0) \oplus V(0) \otimes V(0)$. En el caso 4-dimensional, I_R es necesariamente abeliano y llegamos a las álgebras $E_7 = \mathbb{F} \cdot x \boxplus A(1) \boxplus A(1)$ $E_8 = \mathbb{F} \cdot x \boxplus \mathbb{F} \cdot y \boxplus A(1) \boxplus A(1)$, $E_9 = \langle x, y\rangle \boxplus A(1) \boxplus A(1)$ con $[x, y] = y$, $E_{10} = \mathbb{F} \cdot x \boxplus F$ $E_{11} = \mathbb{F} \cdot x \boxplus \mathbb{F} \cdot y \boxplus F$ y $E_{12} = \langle x, y\rangle \boxplus F$ con $[x, y] = y$.

Si I_R es 5-dimensional, $J = V(0)$. Descomponemos $I_R = (I_R)_1 \oplus (I_R)_0$ y podemos suponer que $I_R^2 \neq 0$ ya que si lo fuera volvemos a los casos E_8, E_{11}. Además, si escribimos $(I_R)_0 = \langle x\rangle$, $[x, (I_R)_1] \subseteq (I_R)_1$. Por otro lado, aplicando b) del Lema 1.2.14, tenemos:

- si $(I_R)_1 = V(1) \otimes V(1)$, la única posibilidad válida es $(I_R)_1^2 = 0$ debido a que si escribimos $S = A \oplus A$ con $A = \mathfrak{sl}_2$,

$$\mathrm{Hom}_S(V(1) \otimes V(1) \otimes V(1) \otimes V(1), V(1) \otimes V(1)) = 0 \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Hom}_S(V(1) \otimes V(1) \otimes V(1) \otimes V(1), V(0) \otimes V(0)) = \langle (\cdot,\cdot)_1 \otimes (\cdot,\cdot)_1 \rangle$$

  donde $(\cdot,\cdot)_1 \colon V(1) \otimes V(1) \to V(0)$ es la 1-transvección que es antisimétrica. Luego los productos que tenemos son simétricos y necesitamos uno antisimétrico. Así, $(I_R)_1^2 = 0$, y $\mathrm{ad}_{(I_R)_1} x = Id$. Esto nos proporciona el álgebra E_{13}

- si $(I_R)_1 = V(1) \otimes V(0) \oplus V(0) \otimes V(1)$,

$$\mathrm{Hom}_S(V(0) \otimes V(1) \otimes V(1) \otimes V(0), I_R) = 0$$

$$\mathrm{Hom}_S(V(1) \otimes V(0) \otimes V(1) \otimes V(0), V(0) \otimes V(0)) = \langle p(\cdot,\cdot) \rangle \quad \text{y}$$

$$\mathrm{Hom}_S(V(0) \otimes V(1) \otimes V(0) \otimes V(1), V(0) \otimes V(0)) = \langle q(\cdot,\cdot) \rangle$$

la única posibilidad válida de producto es $[(I_R)_1, (I_R)_1] \subseteq (I_R)_0$ y o bien $(I_R)_1^2 = 0$ y, como I_R no es abeliana y llegamos al álgebra de Lie E_{14} o bien $(I_R)_1^2 = (I_R)_0$, luego I_R es nilpotente y por tanto $[(I_R)_0, (I_R)_1] = 0$. En este caso, $p(a \otimes \alpha, b \otimes \beta) = (a,b)_1 \otimes \alpha\beta$ que es antisimétrico y, de forma análoga, $q(\alpha \otimes a, \beta \otimes b) = \alpha\beta \otimes (a,b)_1$, lo que nos lleva al álgebra E_{15}.

B.2 L no es descomponible, con lo que R será un $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$-módulo no trivial, luego $R_1 \neq 0$. Los módulos de $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ son de la forma $V(n) \otimes V(m)$ con dimensión $(n+1) \cdot (m+1)$. Distinguiremos los casos en los que existen módulos triviales o no.

- Si $R_0 = 0$ entonces $R = N$ y dado que la dimensión más pequeña para los módulos irreducibles no triviales es de 2 entonces R puede descomponer en a lo más 3 módulos irreducibles.
  - Si hay exactamente 3, la única posibilidad es $R = 2(V(0) \otimes V(1)) \oplus (V(1) \otimes V(0))$ con $R^2 = 0$ (ver razonamientos previos) y no puede ocurrir porque L es indescomponible.
  - Si hay 2 irreducibles, para que L no descomponga, al menos uno de ellos no debe contener $V(0)$ con lo que la única opción es $R = (V(0) \otimes V(1)) \oplus (V(1) \otimes V(1))$ (el caso $R = (V(0) \otimes V(1)) \oplus (V(1) \otimes V(0))$ leva a $R^2 = 0$, luego descomponibilidad). En este caso, es fácil comprobar que $R^2 = 0$. Esto nos proporciona la extensión escindida nula E_{16}.
  - Si solo hay un irreducible, por indescomponibilidad, llegamos a $R = V(1) \otimes V(1)$ o $R = V(1) \otimes V(2)$ y $R^2 = 0$ en ambos casos y obtenemos las extensiones escindidas nulas E_{17} y E_{18}.
- Si $R_0 \neq 0$ entonces $R_1 = V(1) \otimes V(1)$ o $V(0) \otimes V(1) \oplus V(1) \otimes V(0)$ como única posibilidad, siendo $R_0 = p(V(0) \otimes V(0))$ con $p = 1, 2$. Por indescomponibilidad, $R^2 = R_0^2 + R_1^2 + [R_0, R_1] \neq 0$ y, por la descomposición en módulos de R_1, $R_1^2 \subseteq R_0$ y la dimensión de R_1^2 es ≤ 1 si $R_1 = V(1) \otimes V(1)$ y ≤ 2 en el otro caso. Si N es el nilradical del álgebra:
  - En el caso $R = N$, $[R_0, R_1] = 0 = R_0^2$ por Lema 2.1.5 (observar que R_0 es nilpotente de dimensión a lo más 2). Luego $R^2 = R_1^2 = R_0$ (el caso $R_1^2 \neq R_0$, lleva a dimensión 2 para R_0, luego $R_0 = R_1^2 \oplus \mathbb{F} \cdot a$ y el álgebra descompondría en la forma $(\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus R_1 \oplus R_1^2) \boxplus \mathbb{F} \cdot a$). La única posibilidad es $R_1 = V(0) \otimes V(1) \oplus V(1) \otimes V(0)$ (el otro caso no proporciona producto antisimétrico) y, usando los productos $p(\cdot,\cdot), q(\cdot,\cdot)$ obtenemos las álgebras E_{19} si R_0 es 1-dimensional y a $E = \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus M$ donde $M = V(1) \otimes V(0) \oplus V(0) \otimes V(1) \oplus \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$ con $[a \otimes 1 + 1 \otimes b + px + ty, c \otimes 1 + 1 \otimes d + rx + sy] = (a,c)_1 x + (b,d)_1 y$ si es de dimensión 2, que es claramente descomponible, luego no sirve aquí.

- En el caso $R \neq N$ y $R_0 = \mathbb{F} \cdot x$, $R_1 = N$ con $R_1^2 = 0$ y $ad\, x$ actuando como múltiplo no nulo de la identidad sobre cada módulo irreducible de R_1. Esto nos lleva a las álgebras E_{20} y E_{21}.
- Si $R \neq N = R_1$, $R_0 = \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$, luego $R_0^2 = 0$. Tenemos que, $R_1 \neq V(1 \otimes V(1))$: de otra forma, reescalando x e y si es necesario, llegamos a que $\mathrm{ad}_N(x) = \mathrm{ad}_N(y) = id$ pero entonces $x - y \in Z(L))$ y, por tanto, $L = (\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus R_1 \oplus \langle x \rangle) \boxplus \langle x - y \rangle$ es descomponible. Si $N = R_1 = V(0) \otimes V(1) \oplus V(1) \otimes V(0)$ con $R_0 = \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$. Denotando $A = V(0) \otimes V(1)$ y $B = V(1) \otimes V(0)$, tras eliminar indescomponibilidades llegamos a que $\mathrm{ad}_A\, x = \alpha id, \mathrm{ad}_B\, x = \beta id$, $\mathrm{ad}_A\, y = \gamma id, \mathrm{ad}_B\, y = \delta id$ con $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$, $(\gamma, \beta), (\beta, \delta) \neq (0, 0)$. Esto nos lleva al álgebra E_{22}.
- Si $R \neq N = R_1 \oplus \mathbb{F} \cdot x$, luego $R_0 = \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$. Si $R_1^2 = 0$, , por indescomponibilidad, $[y, x] \neq 0$, reescalando podemos suponer $[y, x] = x$ y $ad\, y$ actuando de forma escalar no nula sobre cada componente irreducible de R_1 (como dado que $[y, x] = x$ acción nula significa R_0 ideal). Esto nos lleva a las álgebras E_{23} y E_{24}. Si $R_1^2 \neq 0$, entonces $R_1^2 = \mathbb{F} \cdot x$ y complementamos y en $R_0 = \mathbb{F} \cdot x \oplus \mathbb{F} \cdot y$, este caso solamente es posible para $R_1 = V(0) \otimes V(1) \oplus V(1) \otimes V(0)$ y, eliminando indescomponibilidades y teniendo en cuenta que N es una Heisenberg generalizada, llegamos al álgebra E_{25}.

$\square$

Observaciones 2.2.5. *Las álgebras de Lie de dimensión* ≤ 3 *se deducen, usando métodos lineales e identidad de Jacobi, en [5, Capítulo 1]. De entre ellas, las resolubles no nulas son:*

- A_1, A_2, A_3 *abelianas de dimensión* $1, 2, 3$,
- $B_2 = \langle x, y \rangle$ *con* $[x, y] = x$, *resoluble de dimensión* ”
- $n_{2,2} = \langle x, y, x \wedge y \rangle$ *Heisenberg* 3*-dimensional.*
- *La familias* 1*-paramétricas* $C_3^\alpha = \langle x, y, z \rangle$ *y* $D_3^\beta = \langle a, b, c \rangle$ *con productos no nulos:* $[x, z] = x, [y, z] = \alpha y$; $[a, c] = a + \beta b, [b, c] = b$.

De acuerdo con Gr. Tsagas en [12], parece que existen más de 10.000 álgebras nilpotentes de dimesión ≤ 6 *en característica cero. Esta lista se acorta considerablemente al imponer la condición de que tales álgebras admitan una descomposición de Levi no trivial. Turkowski prueba que sobre el cuerpo real, tan solo aparecen 63. En los teoremas que acabamos de probar vemos que la lista de tales álgebras es manejable para aquellas nilpotentes de dimensión* ≤ 12. *Esto indica que el factor de Levi controla fuertemente la estructura del radical.*

d	V	$\Lambda^2 V$	$m \otimes \Lambda V / \Lambda^3 V$
2	$V(1)$	$V(0)$	$V(1)$
3	$V(2)$	$V(2)$	$V(4) \oplus V(2)$
4	$V(3)$	$V(4) \oplus V(0)$	$V(7) \oplus V(5) \oplus V(3) \oplus V(1)$
	$2V(1)$	$V(2) \oplus 3V(0)$	$2V(3) \oplus 6V(1)$
5	$V(4)$	$V(6) \oplus V(2)$	$V(10) \oplus V(8) \oplus V(6) \oplus 2V(4) \oplus V(2)$
	$V(2) \oplus V(1)$	$V(3) \oplus V(2) \oplus V(1) \oplus V(0)$	$V(5) \oplus 2V(4) \oplus 3V(3) \oplus 3V(2) \oplus 3V(1) \oplus V(0)$
6	$V(5)$	$V(8) \oplus V(4) \oplus V(0)$	$V(13) \oplus V(11) \oplus V(9) \oplus 2V(7) \oplus 2V(5) \oplus V(3) \oplus V(1)$
	$V(3) \oplus V(1)$	$2V(4) \oplus V(2) \oplus 2V(0)$	$2V(7) \oplus 5V(5) \oplus 6V(3) \oplus 6V(1)$
	$2V(2)$	$V(4) \oplus 3V(2) \oplus V(0)$	$2V(8) \oplus 2V(6) \oplus 8V(4) \oplus 8V(2) \oplus 4V(0)$
	$3V(1)$	$3V(2) \oplus 6V(0)$	$8V(3) \oplus 19V(1)$
7	$V(6)$	$V(10) \oplus V(6) \oplus V(2)$	
	$V(4) \oplus V(1)$	$V(6) \oplus V(5) \oplus V(3) \oplus V(2) \oplus V(0)$	$V(10) \oplus V(9) \oplus V(8) \oplus 2V(7) \oplus 2V(6) \oplus 2V(5) \oplus 4V(4) \oplus 2V(3) \oplus 2V(2) \oplus 3V(1)$
	$V(3) \oplus V(2)$	$V(5) \oplus V(4) \oplus V(3) \oplus V(2) \oplus V(1) \oplus V(0)$	$V(8) \oplus 2V(7) \oplus 2V(6) \oplus 3V(5) \oplus 3V(4) \oplus 3V(3) \oplus 3V(2) \oplus 2V(1) \oplus 2V(0)$
	$V(2) \oplus 2V(1)$	$2V(3) \oplus 2V(2) \oplus 2V(1) \oplus 3V(0)$	$2V(5) \oplus 5V(4) \oplus 6V(3) \oplus 9V(2) \oplus 10V(1) \oplus 4V(0)$
8	$V(7)$	$V(12) \oplus V(8) \oplus V(4) \oplus V(0)$	
	$2V(3)$	$V(6) \oplus 3V(4) \oplus V(2) \oplus 3V(0)$	
	$2V(2) \oplus V(1)$	$V(4) \oplus 2V(3) \oplus 3V(2) \oplus 2V(1) \oplus 2V(0)$	
	$4V(1)$	$6V(2) \oplus 10V(0)$	
	$V(4) \oplus V(2)$	$2V(6) \oplus V(4) \oplus 3V(2)$	
	$V(5) \oplus V(1)$	$V(8) \oplus V(6) \oplus 2V(4) \oplus 2V(0)$	
	$V(3) \oplus 2V(1)$	$3V(4) \oplus 3V(2) \oplus 4V(0)$	
9	$V(8)$		
	$V(2) \oplus 3V(1)$		
	$V(4) \oplus 2V(1)$		
	$V(3) \oplus V(2) \oplus V(1)$		
	$3V(2)$		
	$V(4) \oplus V(3)$		
	$V(5) \oplus V(2)$		
	$V(6) \oplus V(1)$		

Tabla 2.2: Descripción de los diferentes productos dependiendo de V.

Notación	$n_{d,1}$	Posibilidades
$A(n)$	$V(n)$	$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$
$A(n, m)$	$V(n) \oplus V(m)$	$(n, m) = (1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (6, 1)$
$A(n, m.p)$	$V(n) \oplus V(m) \oplus V(p)$	$(n, m, p) = (1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (3, 1, 1), (4, 1, 1)$ $(3, 2, 1), (2, 2, 2)$
$A(n, m, p, q)$	$V(n) \oplus V(m) \oplus V(p) \oplus V(q)$	$(n, m, p, q) = (1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1)$

Tabla 2.3: Nilradical abeliano según su tipo de nilpotencia d.

Nº	Notación	$\mathfrak{n}_{d,2}/\mathfrak{n}_{d,2}^2$	$\mathfrak{n}_{d,t}/I$	I	C
1	$B(1;0)$	$V(1)$	$V(0)$	0	L
2	$B(2;2)$	$V(2)$	$V(2)$	0	L
3	$B(3;0)$	$V(3)$	$V(0)$	$V(4)$	H
4	$B(3;4)$		$V(4)$	$V(0)$	CL
5	$B(1,1;0,0,0)$	$2V(1)$	$3V(0)$	$V(2)$	CL
6	$B(1,1;0,0)$		$2V(0)$	$V(2)\oplus V(0)$	M/D
7	$B(1,1;0)$		$V(0)$	$V(2)\oplus 2V(0)$	H/D
8	$B(1,1;2)$		$V(2)$	$3V(0)$	CL
9	$B(1,1;2,0,0)$		$V(2)\oplus 2V(0)$	$V(0)$	M
10	$B(1,1;2,0)$		$V(2)\oplus V(0)$	$2V(0)$	M
11	$B(4;2)$	$V(4)$	$V(2)$	$V(6)$	CL
12	$B(2,1;1)$	$V(2)\oplus V(1)$	$V(1)$	$V(3)\oplus V(2)\oplus V(0)$	CL
13	$B(2,1;0)$		$V(0)$	$V(3)\oplus V(2)\oplus V(1)$	HD
14	$B(2,1;1,0)$		$V(1)\oplus V(0)$	$V(3)\oplus V(2)$	CL
15	$B(2,1;2)$		$V(2)$	$V(3)\oplus V(1)\oplus V(0)$	CL/D
16	$B(2,1;3)$		$V(3)$	$V(2)\oplus V(1)\oplus V(0)$	CL
17	$B(2,1;2,0)$		$V(0)\oplus V(2)$	$V(3)\oplus V(1)$	D
18	$B(5;0)$	$V(5)$	$V(0)$	$V(8)\oplus V(4)$	H
19	$B(3,1;2)$	$V(3)\oplus V(1)$	$V(2)$	$2V(4)\oplus 2V(0)$	CL
20	$B(3,1;0)$		$V(0)$	$2V(4)\oplus V(2)\oplus V(0)$	H/D
21	$B(3,1;0,0)$		$2V(0)$	$2V(4)\oplus V(2)$	CL
22	$B(2,2;2)$	$V(2)\oplus V(2)$	$V(2)$	$V(4)\oplus 2V(2)\oplus V(0)$	M/D
23	$B(2,2;0)$		$V(0)$	$V(4)\oplus 3V(2)$	H
24	$B(1,1,1;0,0)$	$3V(1)$	$2V(0)$	$3V(2)\oplus 4V(0)$	M/D
25	$B(1,1,1;0,0,0)$		$3V(0)$	$3V(2)\oplus 3V(0)$	M/D
26	$B(1,1,1;0)$		$V(0)$	$3V(2)\oplus 5V(0)$	H/D
27	$B(1,1,1;2)$		$V(2)$	$2V(2)\oplus 6V(0)$	M/D
28	$B(4,1;0)$	$V(4)\oplus V(1)$	$V(0)$	$V(5)\oplus V(3)\oplus V(2)$	HD
29	$B(3,2;0)$	$V(3)\oplus V(2)$	$V(0)$	$V(5)\oplus V(4)\oplus V(3)\oplus V(2)\oplus V(1)$	D
30	$B(3,2;1)$		$V(1)$	$V(5)\oplus V(4)\oplus V(3)\oplus V(2)\oplus V(0)$	CL
31	$B(2,1,1;1)$	$V(2)\oplus 2V(1)$	$V(1)$	$2V(3)\oplus 2V(2)\oplus V(1)\oplus 3V(0)$	M/D
32	$B(2,1,1;0)$		$V(0)$	$2V(3)\oplus 2V(2)\oplus 2V(1)\oplus 2V(0)$	HD
33	$B(2,1,1;0,0)$		$2V(0)$	$2V(3)\oplus 2V(2)\oplus 2V(1)\oplus V(0)$	D
34	$B(7;0)$	$V(7)$	$V(0)$	$V(12)\oplus V(8)\oplus V(4)$	H
35	$B(3,3;0)$	$2V(3)$	$V(0)$	$V(6)\oplus 3V(4)\oplus V(2)\oplus 2V(0)$	H/D
36	$B(1,1,1,1;0)$	$4V(1)$	$V(0)$	$6V(2)\oplus 11V(0)$	H/D
37	$B(2,2,1;0)$	$2V(2)\oplus V(1)$	$V(0)$	$V(4)\oplus 2V(3)\oplus 3V(2)\oplus 2V(1)\oplus V(0)$	H/D
38	$B(5,1;0)$	$V(5)\oplus V(1)$	$V(0)$	$V(8)\oplus V(6)\oplus 2V(4)\oplus V(0)$	H/D
39	$B(3,1,1;0)$	$V(3)\oplus 2V(1)$	$V(0)$	$3V(4)\oplus 3V(2)\oplus 3V(0)$	H/D

Tabla 2.4: Clasificación del nilradical de índice ≥ 3

Nº	Notación	N/N^2	N^2/N^3	N^3/N^4	N^4/N^5	C
40	$C(1;0;1)$	$V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	0	L
41	$C(2;2;2)$	$V(2)$	$V(2)$	$V(2)$	0	M
42	$C(2,1;0;1)$	$V(2)\oplus V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	0	D
43	$C(2,1;1;0)$	$V(2)\oplus V(1)$	$V(1)$	$V(0)$	0	M
44	$C(3,1;0;1)$	$V(3)\oplus V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	0	D
45	$C(1,1,1;0,1)$	$3V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	0	M
46	$D(1;0;1;2)$	$V(1)$	$V(0)$	$V(1)$	$V(2)$	L

Tabla 2.5: Clasificación del nilradical de índice ≥ 3

Conclusión

Durante nuestra formación he presentado carencias teóricas en determinadas ramas debido a cursar la doble titulación en Matemáticas e Ingeniería Informática. Con el fin de solventar parte de esas limitaciones, me embarqué en este trabajo puesto que me iba a permitir conocer nuevos conceptos relacionados con el álgebra así como rutinas de aprendizaje.

A lo largo del trabajo, me he enfrentado a libros y artículos matemáticos que me han permitido familiarizarme con la dinámica de un investigador, creciendo un poco más como matemática.

Por otra parte, debido a las limitaciones temporales nos ha quedado pendiente generalizar las álgebras de Lie no resolubles y no semisimples de dimensión ≤ 12 con factor de Levi sl_2 y radical resoluble nilpotente a una con radical resoluble no necesariamente nilpotente simplemente añadiendo módulos triviales.

Bibliografía

[1] P. Benito and D. de-la Concepción. On levi extensions of nilpotent lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 439(5):1441–1457, 2013.

[2] P. Benito and D. de-la Concepción. On extensions of free nilpotent lie algebras of type 2. *Linear Algebra and its Applications*, 457:363–382, 2014.

[3] P. Benito and D. de-la Concepción. An overview of free nilpotent lie algebras. *Comment. Math. Univ. Carolin*, 55(3):325–339, 2014.

[4] J. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] N. Jacobson. *Lie algebras*. Number 10. Courier Corporation, 1979.

[6] G. M. Mubarakzyanov. Classification of 6-dimesional solvable lie algebras wich possess a nilpotent basis element. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.*, 4(35):104–116, 1963.

[7] A. L. Onishchick and Khakimdzhanov Y. B. On semidirect sums of lie algebras. *Mat. Zametki*, 18:31–40, 1975.

[8] J. Patera, R. T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus. Invariants of real low dimension lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 17(6):986–994, 1976.

[9] I. Pérez-Aradros. *Álgebras de Lie con retículo de ideales en cadena*. Universidad de La Rioja, 2016.

[10] J. L. Rubin and P. Winternitz. Solvable lie algebras with heisenberg ideals. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 26(5):1123, 1993.

[11] L. Soria García. *Álgebras de Lie. Estructura y contrucción*. Universidad de La Rioja, 2015.

[12] Gr. Tsagas and T. Koukouvinos. Classification of nilpotent lie algebras of dimension eight. *J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser*, 12(3):179–183, 1999.

[13] P. Turkowski. Solvable lie algebras of dimension six. *Journal of Mathematical Physics*, 31(6):1344–1350, 1990.

[14] P. Turkowski. Structure of real lie algebras. *Linear Algebra and its Applications*, 171:197–212, 1992.